VŨ QUỐC ANH

Tuyển tập
570
BÀI TOÁN
LƯỢNG GIÁC
CHỌN LỌC

THI VÀO ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG
TỪ NĂM 1990 ĐẾN 1999 - 2002

ĐHQG
HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

VŨ QUỐC ANH

TUYỂN TẬP 570 BÀI TOÁN
LƯỢNG GIÁC
CHỌN LỌC
THI VÀO ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG
TỪ NĂM 1990 ĐẾN 2002

IN LẦN THỨ HAI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Để giúp đỡ học sinh chuẩn bị thi vào các trường Cao đẳng và Đại học, chúng tôi giới thiệu 450 bài lượng giác.

Những bài toán được tuyển chọn là những bài toán đã ra trong các kỳ thi tuyển sinh, đó là những bài "lượng giác" rất hay, đa dạng và có tính tổng hợp cao. Học sinh làm những bài toán đó để nâng cao kỹ năng tính toán của mình là một điều rất bổ ích.

Cuốn sách giới thiệu 450 bài toán lượng giác, đã ra trong các kỳ thi tuyển sinh vào 60 trường Cao đẳng và Đại học trong cả nước từ Thái Nguyên, thủ đô Hà Nội, Vinh, Huế, Đà Nẵng đến thành phố Hồ Chí Minh, Cần Thơ, Đà Lạt... thuộc nhiều "khối", nhiều "ban" khác nhau, nên học sinh dù thi vào trường nào, khối nào, phân ban hay chưa phân ban, vẫn có thể tham khảo và tự học được.

Hy vọng cuốn sách sẽ giúp nhiều cho các em học sinh trong việc rèn luyện toán để đạt kết quả tốt.

Cuốn sách có thể có những thiếu sót, mong được các độc giả góp ý.

Tác giả

Chương I

NHỮNG ĐIỀU CẦN NHỚ VÀ CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

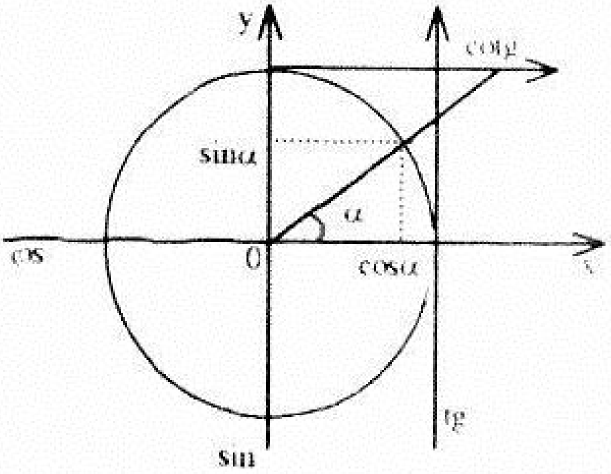
1. Đơn vị đo góc và cung

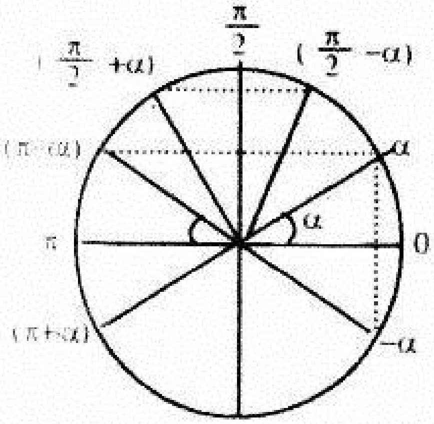
$180^0 = \pi$ radian ; $1^0 = \frac{\pi}{180}$ radian

π radian $= 180^0$; 1 radian $= \left(\frac{180^0}{\pi}\right) = 57^0 17' 45''$

Radian là số đo một cung có độ dài bằng bán kính.

2. Tên gọi các trục sin, cosin, tg và cotg.





$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$

$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $x \neq k\pi$ $(k \in Z)$

Chú ý: $-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Leftrightarrow |\cos\alpha| \leq 1$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Leftrightarrow |\sin\alpha| \leq 1$

$\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ có tính tuần hoàn chu kỳ là 2π

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$ $(k \in Z)$

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$ $(k \in Z)$

$\text{cotg}\alpha$ và $\text{tg}\alpha$ có tính tuần hoàn chu kỳ là π

$\text{cotg}\alpha = \text{cotg}(\alpha + k\pi)$ $(k \in Z)$

$\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha + k\pi)$ $(k \in Z)$

$\text{cotg}\alpha$ và $\text{tg}\alpha$ có thể lấy giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$

3. Hàm số lượng giác của một số cung đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\text{cotg}\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Giải phương trình lượng giác

1) $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

và $x = -\alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

2) $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad (k \in Z)$

và $x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad (k \in Z)$

3) $\text{tg}x = \text{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in Z)$

4) $\cos x = \sin\alpha \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

5. Giới hạn:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}ax}{ax} = 1 \quad (a \neq 0)$$

6. Bất đẳng thức côsi với ba cạnh của tam giác:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$

7 Hệ thức giữa các hàm số lượng giác

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin^2\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$

$\mathrm{tg}\alpha . \mathrm{cotg}\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = (1 + \sin\alpha)(1 - \mathrm{soin}\alpha)$

8 Cung đối nhau α và $(-\alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$

9. Cung bù nhau α và $(\pi - \alpha)$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

$\mathrm{cotg}(\pi-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha$

10. Cung phụ nhau α và $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{cotg}\alpha$

$\mathrm{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\alpha$

9. Cung hơn nhau $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2} + \alpha$)

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{cotg}\alpha$

$\mathrm{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\mathrm{tg}\alpha$

12. Cung hơn nhau π: (α và π + α)

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$$
$$\mathrm{cotg}(\pi + \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$$

13. Công thức cộng cung, công thức nhân đôi, nhân ba.

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$
$$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}a + \mathrm{tg}b}{1 - \mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}$$
$$\mathrm{tg}(a-b) = \frac{\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}b}{1 + \mathrm{tg}a\,\mathrm{tg}b}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\mathrm{tg}2a = \frac{2\mathrm{tg}a}{1 - \mathrm{tg}^2 a}$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Sina, cosa đổi ra $\mathrm{tg}\frac{a}{2}$:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\sin a = \frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}\ ; \quad \cos a = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}\ ; \quad \mathrm{tg}a = \frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \qquad \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\mathrm{tg}3a = \frac{3\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}^3 a}{1 - 3\mathrm{tg}^2 a} \qquad \mathrm{cotg}3a = \frac{1 - 3\mathrm{tg}^2 a}{3\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}^3 a}$$

14. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\text{tg}a + \text{tg}b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\text{tg}a - \text{tg}b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\text{cotg}a + \text{cotg}b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$$

$$\text{cotg}a - \text{cotg}b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$$

15. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

16. Các hệ quả:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

17. Phương trình bậc nhất theo sinx và cosx

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$\frac{a\sin x}{a} + \frac{b\cos x}{a} = \frac{c}{a} \qquad (a \neq 0)$$

$$\sin x + \mathrm{tg}\alpha\cos x = \frac{c}{a} \qquad (\text{đặt } \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\alpha)$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

Điều kiện:

$$\left|\frac{c}{a}\cos\alpha\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{a^2} \leq \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{c^2}{a^2} \leq 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + \frac{b^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad c^2 \leq a^2 + b^2$$

18. Phương trình đẳng cấp đối với sinx và cosx

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \qquad (a, b, c \neq 0)$$

$$a\frac{1 - \cos 2x}{2} + b\frac{1}{2}\sin 2x + c\frac{1 + \cos 2x}{2} = d$$

$$(c-a)\cos 2x + b\sin 2x = 2d - a - b$$

19. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad (|t| \leq \sqrt{2})$

Suy ra: $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

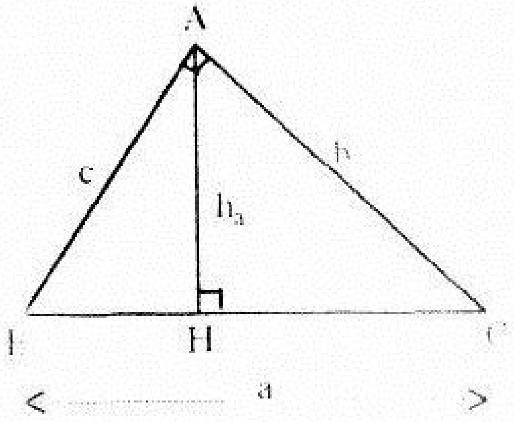
Khi đó (1) trở thành:

$$at + b\frac{t^2 - 1}{2} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0$$

Giải phương trình bậc hai theo t nhưng chỉ nhận các nghiệm thoả mãn điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

20. Hệ thức cơ bản trong tam giác vuông



$$\hat{A} = \frac{\pi}{2} ; \qquad \hat{B} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$$

$$b = a\sin\hat{B} = a\cos\hat{C}$$

$$b = c\,tg\,\hat{B} = c\,cotg\,\hat{C}$$

Đim lý Pytago:

$$\begin{cases} b^2 = BC.HC \\ c^2 = BC.HB \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = BC(HC + HB) = BC.BC$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc \qquad \text{suy ra } (ah_a)^2 = (bc)^2 \qquad (1)$$

Từ 1):

$$a^2h_a^2 = b^2c^2$$

$$h_a^2 = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2} \qquad \text{hay} \qquad \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

21. Hệ thức cơ bản trong tam giác thường.

1. Định lý hàm số sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Suy ra $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\sin B = \frac{b}{2R}$; $\sin C = \frac{c}{2R}$

2. Định lý hàm số cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

3. Định lý hàm số tang:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$$

22. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

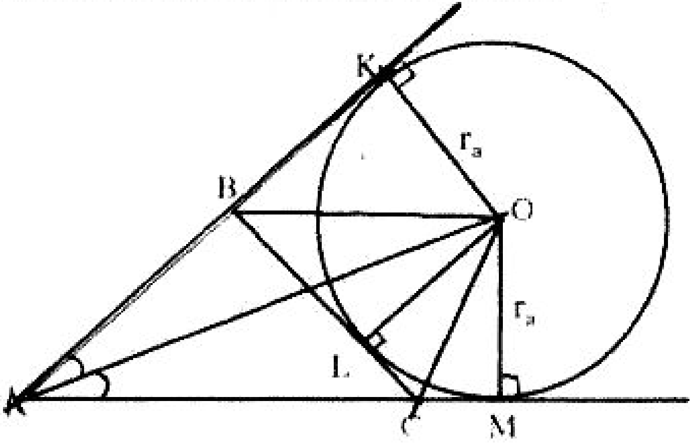
23. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác:

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$r=\frac{b\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$r=\frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

24. Bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác:



$$OK=OL=OM=r_a$$

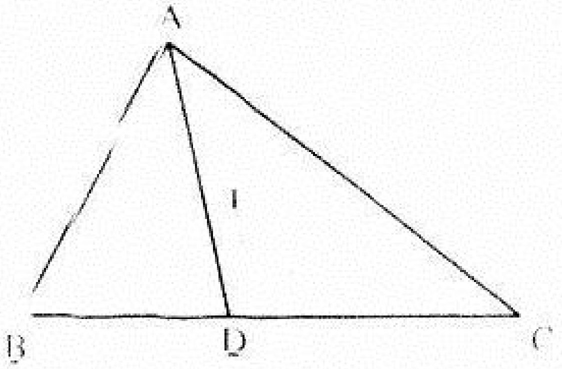
r_a bán kính đường tròn bàng tiếp đối diện góc $\hat{A}$ của ΔABC

$$r_a = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = p\,tg\frac{A}{2}$$

$$r_b = \frac{b\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = p\,tg\frac{B}{2}$$

$$r_c = \frac{c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = p\,tg\frac{C}{2}$$

25. Đường phân giác trong của tam giác

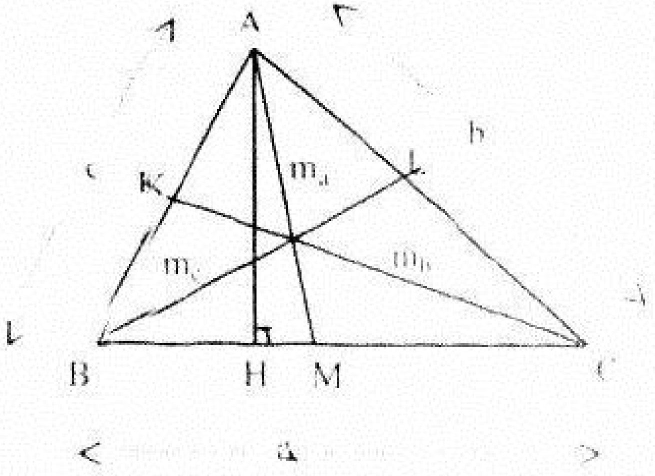


AD=l: phân giác trong của góc A

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$l = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

26. Đường trung tuyến tam giác



Tổng bình phương hai cạnh tam giác:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = \dfrac{a^2}{2} + 2m_a^2 \\ a^2 + b^2 = \dfrac{c^2}{2} + 2m_c^2 \\ a^2 + c^2 = \dfrac{b^2}{2} + 2m_b^2 \end{cases}$$

$AM = m_a$; $BL = m_b$

$CK = m_c$; $BC = a$

$AC = b$; $AB = c$

Hiệu bình phương hai cạnh tam giác:

$$b^2 - c^2 = 2a.HM$$

27. Diện tích tam giác:

1. $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

2. $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

3. $S = \frac{abc}{4R}$

4. $S = pr$

5. $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

6. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

(Công thức Hê rông)

28. Đạo hàm các hàm số lượng giác:

$f: x \to \cos x$	$f': x \to -\sin x$
$f: x \to \sin x$	$f': x \to \cos x$
$f: x \to tgx$	$f': x \to \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
$f: x \to cotgx$	$f': x \to \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + cotg^2 x)$
$f: x \to \cos(ax + b)$	$f': x \to -a\sin(ax + b)$
$f: x \to \sin(ax + b)$	$f': x \to a\cos(ax + b)$

CHƯƠNG II

PHẦN HƯỚNG DẪN

NHỮNG ĐỀ LƯỢNG GIÁC THI ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG TRONG TOÀN QUỐC TỪ 1990 ĐẾN 1995

Bài 1

Giải phương trình: $\sin 3y + \sin y - 2\cos^2 y = 0$

Đ.H. Tổng hợp T.P.HCM (1990)

GIẢI

Ta có: $\sin 3y + \sin y - 2\cos^2 y = 0$ (1)

Biết $\sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y$ nên (1) là:

$\Leftrightarrow$ $3\sin y - 4\sin^3 y + \sin y - 2(1 - \sin^2 y) = 0$

$\Leftrightarrow$ $4\sin^3 y - 2\sin^2 y - 4\sin y + 2 = 0$ (2)

Phương trình (2) có a + b + c + d = 4 − 2 − 4 + 2 = 0 nên có một nghiệm bằng 1 nên có thể biến đổi thành:

$(\sin y - 1)(2\sin^2 y + \sin y - 1) = 0$ với $-1 \le \sin y \le 1$

Do đó: $\left\{\begin{array}{l} \sin y - 1 = 0 \\ 2\sin^2 y + \sin y - 1 = 0 \end{array}\right.$

- Với $\sin y - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin y = 1$ có nghiệm $\boxed{y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $2\sin^2 y + \sin y - 1 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm $\sin y = -1$ và $\sin y = \dfrac{1}{2}$

- Khi $\sin y = -1 \Leftrightarrow$ $\boxed{y = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

- Khi $\sin y = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\boxed{y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

$y = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ $\boxed{y = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi$ có thể là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Bài 2

Tìm các nghiệm trên khoảng $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ của phương trình:

$$\sin\left(\frac{30x+21}{6x-1}\right)+\sin\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right)-2\cos^2\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right)=0$$

Đ.H. Tổng hợp T.P. HCM. (1990)

GIẢI

Ta có: $\sin\left(\frac{30x+21}{6x-1}\right)+\sin\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right)-2\cos^2\left(\frac{10x+7}{6x-1}\right)=0$ (1)

Đặt $\frac{10x+7}{6x-1}=y$ thì $\frac{30x+21}{6x-1}=3y$ do đó (1) trở thành:

$$\sin 3y+\sin y-2\cos^2 y=0$$

$\Leftrightarrow$ $3\sin y-4\sin^3 y+\sin y-2(1-\sin^2 y)=0$

$\Leftrightarrow$ $4\sin^3 y-2\sin^2 y-4\sin y+2=0$

Giải phương trình ta được các nghiệm

$$y=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ y=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ và } y=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$$

Xét $y=\frac{10x+7}{6x-1}$ là hàm nghịch biến với $-\infty<x\le\frac{-1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$
y		$-$	
$\frac{10x+7}{6x-1}$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Do đó: $-\frac{1}{2}<y<\frac{5}{3}$ và $x=\frac{y+7}{6y-10}$

- Với $y=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ta có: $-\frac{1}{2}\le\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{5}{3}$ thì $k=0$

nên $y=\frac{\pi}{2}$ và $x=\frac{y+7}{6y-10}\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\frac{\pi}{2}+7}{3\pi-10}}$

- Với $y=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ta có: $-\frac{1}{2}\le\frac{5\pi}{6}+2k\pi<\frac{5}{3}$ không có $k\in Z$ thoả mãn.

• Với $y = \quad + 2k\pi$ ta có $-\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \frac{5}{3}$ thì k = 0

Nên $y = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{y+7}{6y-10} = \boxed{x = \frac{\frac{\pi}{6}+7}{\pi - 10}}$

Bài 3

Giải phương trình: $\dfrac{\cos 2x + 3\cot g2x + \sin 4x}{\cot g2x - \cos 2x} = 2$

Đ.H. Kinh tế T.P. HCM. (1990)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases}\cot g2x - \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cot g2x - \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}$$

Ta có: $\dfrac{\cos 2x + 3\cot g2x + \sin 4x}{\cot g2x - \cos 2x} = 2$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + 3\cot g2x + \sin 4x = 2\cot g2x - 2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad 3\cos 2x + \cot g2x + \sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x\left(3 + \frac{1}{\sin 2x} + 2\sin 2x\right) = 0$

Vì $\cos 2x \neq 0$ nên chỉ có:

$$3 + \frac{1}{\sin 2x} + 2\sin 2x = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm $\begin{cases}\sin 2x = -1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2}\end{cases}$

• Với $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ (loại)

• Với $\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-\pi}{12} + k\pi}$ $(k \in Z)$

$2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{12} + k\pi}$ $(k \in Z)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM [illegible] THƯ VIỆN
No LC/653.

Bài 4

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là:

sin2A + sin2B = 4sinA.sinB.

Đ.H. Kinh tế T.P. HCM. (1990)

GIẢI

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$

$\Leftrightarrow$ $2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B = 4\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow$ $\sin A\cos A + \sin B\cos B = 2\sin A\sin B$

$\Leftrightarrow$ $\sin A(\cos A - \sin B) + \sin B(\cos B - \sin A) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \sin B\right] + \sin B\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) - \sin A\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B-A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)$$

$$+ \sin B.2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right)\left[\sin A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B-A}{2}\right) + \sin B\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right)\right] = 0 \ (1)$$

Biết $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$$

Suy ra $\sin A.\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B-A}{2}\right) = \sin A\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{B-A}{2} - \sin\frac{B-A}{2}\right)\right]$ (2)

$$\sin B.\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) = \sin B\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$= \sin B\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{B-A}{2} + \sin\frac{B-A}{2}\right)\right] \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) ta được:

$$\sin A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{B-A}{2}\right) + \sin B\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{B-A}{2}(\sin A + \sin B) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{B-A}{2}(\sin B - \sin A)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{B-A}{2}(\sin A + \sin B) + \frac{1}{\sqrt{2}}2\sin^2\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2} > 0 \qquad (4)$$

Do $-\frac{\pi}{2} < B - A < \pi$ nên $\frac{B-A}{2} < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos\frac{B-A}{2} > 0$

và $\sin A > 0, \sin B > 0 \Leftrightarrow$ (4) dung

Từ đó, ở (1) chỉ có $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A+B}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$ Suy ra $C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

Bài 5

Trong tam giác ABC với a, b, c là độ dài **các cạnh và thoả mãn:**

$\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$ Chứng minh **rằng:** $c = \frac{1}{2}(a + b)$

Đ.H. Ngân hàng (1990)

GIẢI

Ta có: $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}$$

Nhân 2 vế với $\sin\frac{A+B}{2} \neq 0$, ta được:

$$\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) = \sin(A + B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) = \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B = 2\sin C \qquad (1)$$

Từ $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$

Ta suy ra $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\sin B = \frac{b}{2R}$; $\sin C = \frac{c}{2R}$

Do đó (1) trở thành: $\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} = 2.\frac{c}{2R}$

$$a + b = 2c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}(a + b)$$

Bài 6

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số:

$$y = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$$

Đ.H. Bách khoa TP. HCM. (1991)

GIẢI

Ta có: $y = 2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2 x$

$$= 1 - \cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{5}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

- Vớisin$(2x + \frac{\pi}{4}) = 1$ thì y có giá trị lớn nhất $\frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- Vớisin$(2x + \frac{\pi}{4}) = -1$ thì y có giá trị bé nhất $\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 7

Giải phương trình: $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 2\sin x\cos 2x$

Đ.H. Bách khoa T.P. HCM.

GIẢI

Ta có: $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 2\sin x\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = \sin 3x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$$

- Vớisinx = 0 suy ra $\boxed{x = k\pi}$
- Với$2\sin x - \sqrt{3} = 0$ suy ra $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Các nghiệm: $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ ∨ $\boxed{x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 8

Giải phương trình: $2\cos^2\frac{6x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$

Đ.H. Pháp Lý T.P. HCM. (1992)

GIẢI

Ta có: $2\cos^2\frac{6x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos\frac{12x}{5} + 1 = 3\cos\frac{8x}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + \cos3\left(\frac{4x}{5}\right) = 3\cos2\left(\frac{4x}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + 4\cos^3\frac{4x}{5} - 3\cos\frac{4x}{5} = 3\left(2\cos^2\frac{4x}{5} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3\frac{4x}{5} - 6\cos^2\frac{4x}{5} - 3\cos\frac{4x}{5} + 5 = 0$$

Đặt $\cos\frac{4x}{5} = t$ với $-1 \le t \le 1$

$$4t^3 - 6t^2 - 3t + 5 = 0 \tag{1}$$

Phương trình có $a + b + c + d = 4 - 6 - 3 + 5 = 0$ nên phương trình có một nghiệm $t = 1$ nên có thể phân tích (1) thành: $(t - 1)(4t^2 - 2t - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ 4t^2 - 2t - 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1+\sqrt{21}}{4} \\ t = \frac{1-\sqrt{21}}{4} \end{array}\right.$$

nên $\cos\frac{4x}{5} = 1$

(loại)

• Với $\cos\frac{4x}{5} = 1$ suy ra $\frac{4x}{5} = 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5k\pi}{2}}$

• Với $\cos\frac{4x}{5} = \frac{1-\sqrt{21}}{4}$

$$\frac{4x}{5} = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{21}}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{5}{4}\arccos\frac{1-\sqrt{21}}{4} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 9

Giải phương trình: $2\sin3x(1 - 4\sin^2x) = 1$

Đ.H. Tổng **hợp Hà Nội (1992, A và B)**

GIẢI

Do $\cos x = 0 (x = \quad + k\pi)$ không phải là nghiệm của phương trình

$2\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = 1$, ta có thể nhân hai vế của phương trình với $\cos x$, ta được: $2\sin 3x(1 - 4(1 - \cos^2 x))\cos x = \cos x$

$$2\sin 3x(-3\cos x + 4\cos^3 x) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 3x.\cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ 6x = \frac{\pi}{2} - (-x) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \\ x &= \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \end{aligned}} \right. \quad (k \in Z)$$

Bài 10

Giải phương trình: $3tg6x - \frac{2}{\sin 8x} = 2tg2x - cotg4x$

Đ.H. Ngoại thương TP. HCM. (1992)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 6x \neq 0 \\ \sin 8x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \\ x \neq k\frac{\pi}{8} \end{cases}$

Ta có:

$$3tg6x - \frac{2}{\sin 8x} = 2tg2x - cotg4x$$

$$\Leftrightarrow tg6x + 2(tg6x - tg2x) = \frac{1}{\sin 4x\cos 4x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{1 - \cos^2 4x}{\sin 4x\cos 4x}$$

$$\Leftrightarrow (tg6x - tg4x) + 2(tg6x - tg2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 6x\cos 4x} + \frac{2\sin 4x}{\cos 6x\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 6x}\left(\frac{1}{\cos 4x} + 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 & \text{(loại)} \\ \frac{1}{\cos 4x} + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \cos 4x = \frac{-1}{4} \right.$$

$$\Leftrightarrow 4x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{-1}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}}$$

Bài 11

Cho phương trình: $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình (1) với $m = \frac{3}{2}$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm x thoả mãn $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

Học viện **Ngân hàng (1992)**

GIẢI

a/ Ta có: $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$ (1)

Với $m = \frac{3}{2}$ thì (1) là $\cos 2x - 4\cos x + \frac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - 4\cos x + \frac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 4\cos x + \frac{3}{2} = 0$

Phương trình có 2 nghiệm: $\left\{\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = \frac{3}{2}\end{array}\right.$ (loại vì > 1)

Với $\cos x = \frac{1}{2}$ suy ra $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

b/ Thế $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ vào (1) ta có:

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2m\cos x - \cos x + m = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) - m(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - m)(2\cos x - 1) = 0$

Phương trình có hai nghiệm $\cos x = m$ và $\cos x = \frac{1}{2}$. Với điều kiện $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ thì $-1 < \cos x < 0$ nên nghiệm số $\cos x = \frac{1}{2}$ không thoả mãn, do đó phương trình (1) có nghiệm thì $\boxed{-1 < m < 0}$

Bài 12

1. **Giải phương trình:** $\cos 3x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin 2x - 2\cos x = 0$

2. **Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số:** $y = \frac{\cos^2 x + \sin x\cos x}{1 + \sin^2 x}$

Đ.H. Bách khoa TP. HCM (1992)

GIẢI

1. Ta có: $\cos 3x +$ [illegible] $\sin 2x - 2\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x - 3\cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x - 2\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(4\cos^2 x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x - 5\right) = 0$$

Do đó: $\begin{cases} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x - 5 = 0 \end{cases}$

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $4\cos^2 x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 4(1 - \sin^2 x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x + 1 = 0 \qquad (1)$$

Phương trình này vô nghiệm vì $\Delta = \frac{9}{4} - 16 < 0$ ($\Delta < 0$ nên tam thức (1) luôn dương đồng dấu với $a = 4 > 0$)

2. Ta có: $y = \dfrac{\cos^2 x + \sin x\cos x}{1 + \sin^2 x}$

$$\Leftrightarrow \quad y(1 + \sin^2 x) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad y\left(1 + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad y(2 + 1 - \cos 2x) = 1 + \cos 2x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y - y\cos 2x = 1 + \cos 2x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad (3y - 1) = (y + 1)\cos 2x + \sin 2x$$

Vế phải: $((y+1)\cos 2x + \sin 2x)^2 \le ((y+1)^2 + 1)(\cos^2 2x + \sin^2 2x)$

$$\Leftrightarrow \quad (3y - 1)^2 \le (y + 1)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y^2 - 6y + 1 \le (y^2 + 2y + 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 8y^2 - 8y - 1 \le 0$$

Do đó: $\dfrac{2 - \sqrt{6}}{4} \le y \le \dfrac{2 + \sqrt{6}}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\boxed{y_{max} = \frac{2+\sqrt{6}}{4}}$

Vậy giá trị bé nhất của y là $\boxed{y_{min} = \frac{2-\sqrt{6}}{4}}$

Bài 13

Cho tam giác ABC với độ dài các cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng A = 2B khi và chỉ khi $a^2 = b(b + c)$

Đ.H. Ngân hàng (1992)

GIẢI

Theo giả thiết : $a^2 = b(b + c)$ (1)

Định lí hàm số cosin cho biết $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + bc$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 - 2bc\cos A = bc$$

$$\Leftrightarrow \quad c - 2b\cos A = b$$

$$\Leftrightarrow \quad c - b = 2b\cos A \qquad (3)$$

Thay $c = 2R\sin C$ và $b = 2R\sin B$ vào (3) ta được:

$$2R(\sin C - \sin B) = 4R\sin B\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C - \sin B = 2\sin B\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C - \sin B = \sin(B + A) + \sin(B - A) \qquad (4)$$

(B + A) và C là hai góc bù nhau nên $\sin C = \sin(B + A)$. Do đó, từ (4) ta có: $-\sin B = \sin(B - A)$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(-B) = \sin(B - A) \Leftrightarrow A = 2B$$

Bài 14

Giải phương trình: $2\log_3 \text{cotg}x = \log_2 \cos x$

Đ.H. Y Dược T.P. HCM (1993)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cot gx > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có: $2\log_3 \text{cotg}x = \log_2 \cos x$

$$\Leftrightarrow \quad \log_3 \text{cotg}^2 x = \log_2 \cos x \qquad (1)$$

Đặt $\log_3 \text{cotg}^2 x = y$ thì $\text{cotg}^2 x = 3^y$ (2)

$\log_2 \cos x = y$ thì $\cos x = 2^y$

Từ (2) ta có: $\text{cotg}^2x = \dfrac{\quad}{-\cos x} = 3^y$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{2y}}{1-2^{2y}} = 3^y$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^y = 3^y(1 - 4^y)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^y = 3^y - 12^y$$

$$\Leftrightarrow \quad 4^y + 12^y = 3^y$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + 3^y = \left(\frac{3}{4}\right)^y \qquad (3)$$

Vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến, nên phương trình (3) có nghiệm số duy nhất $y = -1$

Do đó $\cos x = 2^y = 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

Kiểm nghiệm lại điều kiện $\sin x > 0$, chỉ có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in Z)$ là thích hợp $\boxed{x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 15

Giải phương trình: $\quad 3\text{tg}2x - 4\text{tg}3x = \text{tg}^2 3x\,\text{tg}2x$

Đ.H. Tổng hợp Hà Nội (1993, A)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 & x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 3x \neq 0 & x \neq \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

Ta có: $\quad 3\text{tg}2x - 4\text{tg}3x = \text{tg}^2 3x\,\text{tg}2x$

$$\Leftrightarrow \quad 3\text{tg}2x - 3\text{tg}3x = \text{tg}3x + \text{tg}^2 3x\,\text{tg}2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(\text{tg}2x - \text{tg}3x) = \text{tg}3x(1 + \text{tg}3x\,\text{tg}2x) \qquad (1)$$

Ta thấy: $1 + \text{tg}3x\,\text{tg}2x \neq 0$ vì nếu $1 + \text{tg}3x\,\text{tg}2x = 0$ thì từ (1) $\Rightarrow \text{tg}3x = \text{tg}2x$ và $1 + \text{tg}3x\,\text{tg}2x = 1 + \text{tg}^2 3x = 0$ (vô lý). Do đó, chia 2 vế của (1) cho $1 + \text{tg}3x\,\text{tg}2x$, ta có: $\quad 3\dfrac{\text{tg}2x - \text{tg}3x}{1 + \text{tg}3x\,\text{tg}2x} = \text{tg}3x$

$$\Leftrightarrow \quad -3\text{tg}x = \text{tg}3x$$

$$\Leftrightarrow \quad -3\text{tg}x = \frac{3\text{tg}x - \text{tg}^3x}{1 - 3\text{tg}^2x}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -3\text{tg}x(1-3\text{tg}^2x) = 3\text{tg}x - \text{tg}^3x$$

$$\Leftrightarrow \qquad 10\text{tg}^3x - 6\text{tg}x = 0$$

$$2\text{tg}x\,(5\text{tg}^2x - 3) = 0$$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}\text{tg}x = 0\\ \text{tg}^2x = \dfrac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x = k\pi & (k \in Z)\\ x = \pm\text{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{5}} + k\pi & (k \in Z)\end{array}\right.$

Hai họ nghiệm này đều thoả mãn điều kiện của bài toán.

Bài 16

Giải phương trình: $|\sin x + \cos x| + a\sin 2x = 1$; a là tham số dương

Đ.H. Tài chính Kế toán (1993)

GIẢI

Ta có: $|\sin x + \cos x| + a\sin 2x = 1$ (1)

Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$ Điều kiện $0 \le t \le \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad t^2 = 1 + \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = t^2 - 1$

Do đó (1) trở thành: $t + a(t^2 - 1) = 1$

$\Leftrightarrow \qquad at^2 + t - (a + 1) = 0$

Phương trình có hai nghiệm: $\left\{\begin{array}{l}t = 1\\ t = -\dfrac{a+1}{a} < 0 \quad \text{loại}\end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì $\sin 2x = t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = k\frac{\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

Bài 17

Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{l}\textbf{tgx + cot gx} = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\\ \textbf{tgy + cot gy} = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.$

Đ.H. Ngoại thương (1993)

GIẢI

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}\sin x \ne 0\ ;\ \cos x \ne 0\\ \sin y \ne 0\ ;\ \cos y \ne 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin 2x \ne 0\\ \sin 2y \ne 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \ne \dfrac{k\pi}{2}\\ y \ne \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.$ $(k \in Z)$

Biết $\text{tg}x + \text{cotg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$

tương tự tgy + cotgy =

Do đó, hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x\cos x} = 2\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{1}{\sin y\cos y} = 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 & (1) \\ \sin 2y\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta suy ra: $\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$

Trường hợp 1: $\begin{cases} \sin 2x = 1 & \text{suy ra} \quad x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi \quad (k, l \in Z) \\ \sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 & \text{suy ra} \quad y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

nếu $x = \dfrac{\pi}{4} + l\pi$ thì $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ nên (2) không thoả mãn,. nên các họ nghiệm này phải loại.

Trường hợp 2: $\begin{cases} \sin 2x = -1 & \text{suy ra} \quad x = \dfrac{-\pi}{4} + l\pi \\ \sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1 & \text{suy ra} \quad y = \dfrac{-3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

Thay $x = \dfrac{-\pi}{4} + l\pi$ vào (2) chỉ có số l lẻ thích hợp.

Vậy nghiệm của phương trình là:

$\boxed{x = \dfrac{\pi}{4} + (2k+1)\pi}$ $(k \in Z)$ $\boxed{y = \dfrac{-3\pi}{4} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 18

Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3}\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3} & (1) \\ \lg(x^2 + x + 1) - 1 < 0 & (2) \end{cases}$

Đ.H. Giao thông Vận tải (1993)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{3}\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in Z) \qquad (1)$$

Từ bất phương trình $\lg(x^2 + x + 1) - 1 < 0$

suy ra $\lg(x^2 + x + 1) < 1 = \lg 10$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + 1 < 10$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 9 < 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1-\sqrt{37}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{37}}{2} \qquad (2)$$

So sánh kết quả x ở (1) và (2), ta chỉ chọn được k = 0 hay k=-1. Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\boxed{\frac{-2\pi}{3} < x < \frac{-\pi}{2}} \quad \text{hay} \quad \boxed{\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}}$$

Bài 19

Giải phương trình: $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$

Đ.H. Pháp lý TP. HCM. (1993)

GIẢI

Ta có $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$ (1)

Biến đổi vế trái: $\cos 4x - \cos 2x = 2\sin 3x\sin x$

$\Leftrightarrow \quad (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4\sin^2 3x\sin^2 x$

Phương trình (1) tương đương: $4\sin^2 3x\sin^2 x = 5 + \sin 3x$

Biết $\begin{cases} \sin^2 3x \leq 1 \\ \sin^2 x \leq 1 \end{cases}$

$\sin^2 3x\sin^2 x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4\sin^2 3x\sin^2 x \leq 4 \qquad \Rightarrow \quad VT \leq 4$

Do $\sin 3x \geq -1$ nên $5 + \sin 3x \geq 4$ $\Rightarrow$ $VP \geq 4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $VT = VP = 4$

Do đó: $\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin^2 3x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$

- Với $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1 \Leftrightarrow$ $\cos 2x = -1$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ (1)

- Với $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ suy ra $\boxed{x = \frac{-\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3}}$ (2) $(k \in Z)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + n2\pi}$ $(n \in Z)$

Bài 20

Giải phương trình: $tg^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

Đ.H. Nông Lâm (1993)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ta có: $tg^2 x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} - \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos x + \sin x) = 0$$

- Với $1 + \cos x = 0$ $\Leftrightarrow$ $\cos x = -1$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = \pi + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $\cos x + \sin x = 0$ $\Leftrightarrow$ $tgx = -1$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = \frac{-\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 21

Giải phương trình: $2\cos^2\left(\frac{3x}{5}\right)+1=3\cos\left(\frac{4x}{5}\right)$

Đ.H. Nông Lâm TP. HCM. (1993)

GIẢI

Ta có: $2\cos^2\left(\frac{3x}{5}\right)+1=3\cos\left(\frac{4x}{5}\right)$ (1)

Vế trái, hạ bậc ta được: $2\cos^2\left(\frac{3x}{5}\right)+1=1+\cos\frac{6x}{5}+1=2+\cos\frac{6x}{5}$

Do đó (1) trở thành: $2+\cos\left(\frac{6x}{5}\right)=3\cos\left(\frac{4x}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow\quad 2+\cos3\left(\frac{2x}{5}\right)=3\cos2\left(\frac{2x}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 2+4\cos^3\left(\frac{2x}{5}\right)-3\cos\left(\frac{2x}{5}\right)=3\left(2\cos^2\frac{2x}{5}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad 4\cos^3\left(\frac{2x}{5}\right)-6\cos^2\left(\frac{2x}{5}\right)-3\cos\left(\frac{2x}{5}\right)+5=0 \qquad (2)$$

Phương trình bậc ba này có $a+b+c+d=4-6-3+5=0$ nên có một nghiệm là 1, nên có thể phân tích (2) thành:

$$\left(\cos\frac{2x}{5}-1\right)\left(4\cos^2\frac{2x}{5}-2\cos\frac{2x}{5}-5\right)=0$$

$$-1\le\cos\frac{2x}{5}\le1$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\cos\frac{2x}{5}-1=0\\ 4\cos^2\frac{2x}{5}-2\cos\frac{2x}{5}-5=0\end{array}\right.$$

- Với $\cos\frac{2x}{5}-1=0 \Leftrightarrow \cos\frac{2x}{5}=1 \Leftrightarrow \boxed{x=5k\pi}$ $(k\in Z)$

- Với $4\cos^2\frac{2x}{5}-2\cos\frac{2x}{5}-5=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\cos\frac{2x}{5}=\frac{1+\sqrt{21}}{4} & \text{(loại vì > 1)}\\ \cos\frac{2x}{5}=\frac{1-\sqrt{21}}{4}\end{array}\right.$

Suy ra nghiệm số: $\boxed{x=\pm\frac{5}{2}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{21}}{4}\right)+5k\pi}$ $k\in Z$

Bài 22

Giải phương trình:

1. $|\cot gx| = tgx + \dfrac{1}{\sin x}$

2. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,(2 - \sin 3x)$

Đ.H. Sư phạm Kỹ thuật TP. HCM (1993)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2} \quad (k \in Z)$

Ta có: $|\cot gx| = tgx + \dfrac{1}{\sin x}$

Trường hợp 1. $\cot gx > 0\ ,\ x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

Ta có: $\cot gx = tgx + \dfrac{1}{\sin x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 1 & (\text{loại}) \\ \cos x = \dfrac{-1}{2} & \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in Z)$$

Trường hợp 2. $\cot gx < 0\ ,\ x \neq k\dfrac{\pi}{2}$ (1)

Ta có: $-\cot gx = tgx + \dfrac{1}{\sin x}$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1$$

$$\Rightarrow x = \pi + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

Nghiệm này bị loại vì trái với điều kiện (1)

Bài 23

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{-1}{2} \\ \operatorname{tg}x \operatorname{cotg}y = 1 \end{cases}$

Đ.H. Bách **khoa TP. Hồ Chí Minh (1993)**

GIẢI

Ta có: $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2} & (1) \\ \operatorname{tg}x \operatorname{cotg}y = 1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq k\pi \end{cases} \quad k \in Z$

Từ phương trình (2) ta suy ra:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = 1$$

$\Rightarrow \qquad \sin x\cos y = \sin y\cos x = -\dfrac{1}{2} \qquad (3)$

Suy ra $\quad \sin x\cos y - \sin y\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \qquad \sin(x - y) = 0$

Từ (3) suy ra: $\quad \sin x\cos y + \sin y\cos x = -1$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x + y) = -1 \qquad (5)$

- Với $\sin(x - y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = k\pi$

và $\quad \sin(x + y) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = \dfrac{3\pi}{2} + 2l\pi$

Từ đó suy ra: $2x = \dfrac{3\pi}{2} + (k + 2l)\pi$ và $2y = \dfrac{3\pi}{2} + (2l - k)\pi$

$\boxed{x = \dfrac{3\pi}{4} + (l + \dfrac{k}{2})\pi}$ và $\boxed{y = \dfrac{3\pi}{4} + (l - \dfrac{k}{2})\pi} \quad (k, l \in Z)$

Bài 24

Cho phương trình: $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$

.Hãy giải phương trình trên với m = 0 bằng cách đặt t = |sinx − cosx|.

2. Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Đ.H. Tổng **hợp T.P.HCM. (1994, A – B)**

GIẢI

1. Ta có $\quad |\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m \qquad (1)$

Khi $m = 0$ phương trình (1) thành: $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 0$

Đặt $t = |\sin x - \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| \quad \left(t \in \left[0, \sqrt{2}\right]\right)$

thì $t^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình thành: $t + 4(1 - t^2) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - t - 4 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm:
$$\left\{\begin{array}{ll} t = \dfrac{1-\sqrt{65}}{8} & \text{(loại)} \\ t = \dfrac{1+\sqrt{65}}{8} & \end{array}\right.$$

Do đó: $|\sin x - \cos x| = \dfrac{1+\sqrt{65}}{8}$

$$\Rightarrow \quad \sin x - \cos x = \pm\frac{1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}$$

- Với $\sin x - \cos x = \dfrac{1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right) + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right) + k2\pi \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$

- Với $\sin x - \cos x = \dfrac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left\{\boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{-1-\sqrt{65}}{8\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$

2. Tìm các giá trị của m.

Đặt $t = |\sin x - \cos x|$; $t \in \left[0, \sqrt{2}\right]$ thì $\sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình (1) thành: $t + 4(1 - t^2) = m$

$$\Leftrightarrow \quad -4t^2 + t + 4 = m \qquad (2)$$

(2) là phương trình hoành độ giao điểm của đường $y = m$ và đường

$y = -4t^2 + t + 4$ với $0 \le t \le \sqrt{2}$

$f(t) = -4t^2 + t + 4$ có đạo hàm

$$f'(t) = -8t + 1$$

$f'(t) = 0$ khi $t = \frac{1}{8}$

Bảng biến thiên của f'(t):

t	0		$\frac{1}{8}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	↗	$\frac{65}{16}$	↘	$\sqrt{2} - 4$

Vậy phương trình có nghiệm t thuộc đoạn (0, $\sqrt{2}$) khi:

$$\sqrt{2} - 4 \le m \le \frac{65}{16}$$

Bài 25

Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, AD là phân giác trong của góc A. Đặt $\widehat{MAB} = \beta$; $\widehat{MAC} = \gamma$ và $\widehat{MAD} = \alpha$

1. Chứng minh rằng: $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

2. Giả sử AC ≥ AB. Chứng minh rằng: $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{B - C}{2}\right)$

Đ.H. Tổng hợp TP. HCM. (1994)

GIẢI

1/ Chứng minh : $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

Theo định lý hàm số sin, lần lượt các tam giác MAB và MAC,

ta có: $\dfrac{BM}{\sin\beta} = \dfrac{AM}{\sin B}$ và $\dfrac{CM}{\sin\gamma} = \dfrac{AM}{\sin C}$

Từ đó, ta suy ra: $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{\sin\beta}{\sin B}$ và $\dfrac{CM}{AM} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$

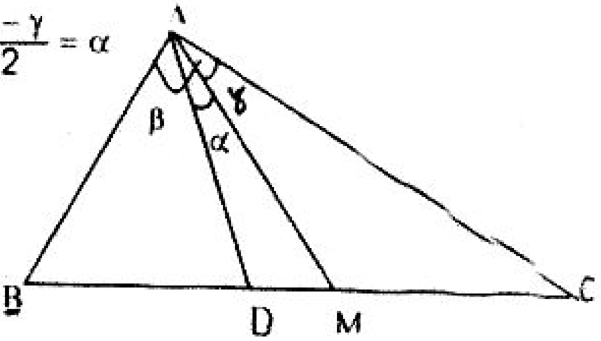
Do M là trung điểm của BC nên BM = CM do đó $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{CM}{AM}$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C} \qquad (1)$$

hay [illegible] $\dfrac{\sin B}{\sin C}$

2/ AC ≥ AB. Chứng minh rằng: $\text{tg}\alpha = \text{tg}^2\dfrac{A}{2}\,\text{tg}\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$

Ta có: $\begin{cases}\beta - \alpha = \dfrac{A}{2}\\ \gamma + \alpha = \dfrac{A}{2}\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{\beta+\gamma}{2} = \dfrac{A}{2}\\ \dfrac{\beta-\gamma}{2} = \alpha\end{cases}$



Từ (1) ta suy ra: $\dfrac{\sin B}{\sin\beta} = \dfrac{\sin C}{\sin\gamma}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin B - \sin C}{\sin\beta - \sin\gamma} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin\beta + \sin\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}}{2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}}{\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}} = \frac{\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}\frac{A}{2}\,\text{tg}\frac{B-C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}\,\text{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}^2\frac{A}{2}\,\text{tg}\frac{B-C}{2} = \text{tg}\alpha$$

Chú thích: $\dfrac{B+C}{2}$ và $\dfrac{A}{2}$ là 2 góc phụ nhau nên $\text{cotg}\dfrac{B+C}{2} = \text{tg}\dfrac{A}{2}$

Bài 26

Giải phương trình: $\dfrac{(3 + 2\sin x)\cos x - (1 + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} = 1$

Đ.H. Tổng hợp T.P. HCM. (1994, D)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{(3 + 2\sin x)\cos x - (1 + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} = 1$ (1)

Điều kiện: $1 + \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \;\; (k \in Z)$

Từ (1) ta suy ra: $(3 + 2\sin x)\cos x - (1 + \cos^2 x) = \quad + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \quad 3\cos x + 2\sin x\cos x - 1 - \cos^2 x = 1 + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 1$ và $\cos x = 2$ (loại)

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 2k\pi} \quad (k \in Z)$

Bài 27

Cho tam giác ABC thoả $\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A.

Đ.H. Tổng hợp T.P. HCM. (1994, D)

GIẢI

Ta có: $$\sin\frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \qquad (1)$$

Từ (1) ta suy ra $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{2} = \frac{a^2}{4bc}$ (2)

Theo định lý hàm số côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ suy ra

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta có: $$1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow 2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2$$

$\Leftrightarrow (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow b = c$, nên ΔABC cân ở A.

Bài 28

Cho tam giác ABC thoả: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c}$

Chứng minh rằng tam giác ABC là đều (ký hiệu a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB tương ứng).

Đ.H. Tổng hợp T.P. HCM. (1994, D)

GIẢI

Theo định lý hàm số côsin, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Suy ra: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc} \le \frac{a^2}{4bc}$$

$$\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}} \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi b = c và ΔABC là tam giác cân

Tương tự (1) ta suy ra: $\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ (2)

Dấu "=" xảy ra khi a = c.

Nhân (1) và (2) vế với vế ta được: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \le \frac{ab}{4c\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{4c}$

Dấu "=" xảy ra khi b = c và c = a hay ΔABC là tam giác đều.

Bài 29

Giải phương trình lượng giác: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1994, A)

GIẢI

Phương trình đã cho: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2}}$ (1)

phải có điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \ge 0 \\ \sin^3 x + \cos^3 x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin x + \cos x \ge 0 \end{cases}$

Ta có: $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$

$$= (\sin x + \cos x)^2$$

và $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)$

$$= (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

Do đó, phương trình (1) có thể viết thành:

$$\sqrt{\sin x + \cos x}\left(\sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\sin x + \cos x} - \sqrt{\frac{2 - \sin 2x}{4}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin x + \cos x} = 0 \\ \sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\sin x + \cos x} = \sqrt{\dfrac{2 - \sin 2x}{4}} \end{cases}$$

• Với $\sqrt{\sin x + \cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-\pi}{4} + k\pi} \quad k \in Z$$

• Với $\sqrt{\cos x - \sin x} + \sqrt{\sin x + \cos x} = \sqrt{\dfrac{2 - \sin 2x}{4}}$

$$\Leftrightarrow 2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} = \frac{2 - \sin 2x}{4}$$

Với điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \geq 0 \\ \sin x + \cos x \geq 0 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x = \dfrac{3\pi}{4}\right) \end{cases}$

• $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ VT: $2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} = -\sqrt{2}$

VP: $\dfrac{2 - \sin x}{4} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$ VT≠VP⇒ PT vô nghiệm

• $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ VT: $2\cos x + 2\sqrt{\cos 2x} \geq 2\cos x \geq 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (2)

VP: $\dfrac{2 - \sin 2x}{4} \leq \dfrac{3}{4}$ (3)

Từ (2) , (3) ⇒ PT vô nghiệm

Bài 30

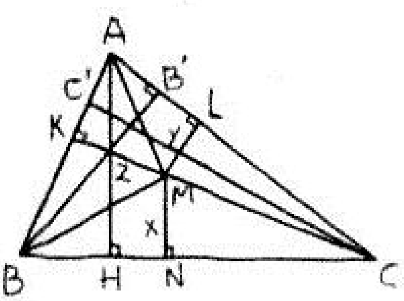
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Gọi x, y, z lần lượt là các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$$

trong đó a, b, c là 3 cạnh còn R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Khi nào đạt dấu bằng?

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1994, A)

GIẢI



Đặt MN = x ; ML = y ; MK=z AH = h_a;

BB'= h_b;CC'=h_c

Ta có: $\dfrac{x}{h_a} = \dfrac{dt\Delta BMC}{dt\Delta ABC}$ (1)

$$\frac{y}{h_b} = \frac{dt\Delta AMC}{dt\Delta ABC} \qquad (2)$$

$$\frac{z}{h_c} = \frac{dt\Delta AMB}{dt\Delta ABC} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế, ta có $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$

Do đó: $h_a + h_b + h_c = (h_a + h_b + h_c)\left(\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}\right) \geq$

$$\geq \left(\sqrt{h_a}\sqrt{\frac{x}{h_a}} + \sqrt{h_b}\sqrt{\frac{y}{h_b}} + \sqrt{hc}\sqrt{\frac{z}{h_c}}\right)^2$$

(theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki)

Suy ra: $\sqrt{h_a + h_b + h_c} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ (4)

Ta lại có: $h_a = b\sin C$; $h_b = c\sin A$; $h_c = a\sin B$

nên $\sqrt{h_a + h_b + h_c} = \sqrt{b\sin C + c\sin A + a\sin B}$

$$= \sqrt{b\frac{c}{2R} + c\frac{a}{2R} + a\frac{b}{2R}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta suy ra đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases}$ ⇔ ΔABC đều và M là trọng tâm.

Bài 31

Giải phương trình: $\dfrac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

Đại học Bách khoa Hà Nội (1994)

GIẢI

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$

Biết $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ nên phương trình đã cho:

$$\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$$

Tương đương với phương trình:

$$4(1 - \cos^2 2x) + 3(1 - \cos 2x) - 9 - 3\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x + 3\cos 2x + 1 = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có các nghiệm: $\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Với $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (loại)
- Với $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi}$ $(k \in Z)$

ĐỀ THI NĂM 1994

Bài 32

x, y là hai góc nhọn thoả mãn hệ thức: $\sin^2x + \sin^2y = \sin(x + y)$

Chứng minh rằng: $x + y = \dfrac{\pi}{2}$

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (1994)

GIẢI

Các góc x, y nhọn nên $\sin x > 0$; $\sin y > 0$; $\cos x > 0$ và $\cos y > 0$.

Ta có: $\sin^2x + \sin^2y = \sin(x + y)$

$\Leftrightarrow \sin^2x + \sin^2y = \sin x\cos y + \sin y\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin x - \cos y) = \sin y(\cos x - \sin y)$ (1)

Từ vế trái của (1) ta suy ra nếu $\sin x > \cos y$ thì vế phải của (1) đồng dấu với vế trái nên $\cos x > \sin y$, điều này vô lý, vì khi đó $1 = \sin^2x + \cos^2x > \cos^2y + \sin^2y = 1$. Nếu $\sin x < \cos y$ thì $\cos x < \sin y$, điều này cũng không thể xảy ra, vì khi đó $1 = \sin^2x + \cos^2x < \cos^2y + \sin^2y = 1$.

Vậy chỉ có thể xảy ra khả năng $\sin x = \cos y$ và $\cos x = \sin y$ do đó x và y là hai góc phụ nhau nên $x + y = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 33

Giải phương trình $|\cos 3x| = 1 - \sqrt{3}\sin 3x$

Đ.H. Bách khoa TP. HCM. (1994)

GIẢI

Ta có: $|\cos 3x| = 1 - \sqrt{3}\sin 3x$ (1)

Với $1 - \sqrt{3}\sin 3x \geq 0 \Leftrightarrow \sin 3x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, bình phương hai vế của (1) ta có:

$$\cos^2 3x = 1 - 2\sqrt{3}\sin 3x + 3\sin^2 3x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 3x - 2\sqrt{3}\sin 3x = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin3x(2\sin3x - \sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Với $\sin3x = 0$ ta có: $3x = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{k\pi}{3}} \quad (k \in Z)$

Bài 34

Chứng minh rằng một tam giác là đều nếu 3 cạnh a, b, c và bán kính đường tròn nội tiếp thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$.

Đ.H. Xây dựng Hà Nội (1994)

GIẢI

Trong tam giác, ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$

$b^2 + c^2 \geq 2bc$

$a^2 + c^2 \geq 2ac$

suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \quad (1)$

Biết $S = pr$ nên $r = \dfrac{S}{p}$, do đó: $36r^2 = 36.\dfrac{S^2}{p^2}$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 36\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}$$

$$= \frac{72}{2p}(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= \frac{9.8}{a+b+c}\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$2\sqrt{p-a}.\sqrt{p-b} \leq (p-a) + (p-b) = 2p - a - b = c \quad (3)$$

$$2\sqrt{p-b}.\sqrt{p-c} \leq (p-b) + (p-c) = 2p - b - c = a \quad (4)$$

$$2\sqrt{p-c}.\sqrt{p-a} \leq (p-c) + (p-a) = 2p - c - a = b \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta suy ra:

$$8\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq abc$$

Do đó, từ (1) và (2) ta có:

$$ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad (ab + bc + ac)(a + b + c) \leq 9abc$$

$$\Leftrightarrow \quad a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \leq 0$$

Do đó: $a = b = c$

Bài 35

Cho phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 2x$

a/ Tìm nghiệm khi $a = 1$

b/ Tìm a để phương trình có nghiệm.

Đ.H. Xây dựng HN. (1994)

GIẢI

Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 2x \quad (1)$

Vế trái $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$

$$= 1 \times (\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x \quad = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

a/ Khi $a = 1$ thì (1) trở thành: $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 2x + 4\sin 2x - 4 = 0$$

Giải ra, ta được: $\begin{cases} \sin 2x = \frac{2}{3} \\ \sin 2x = -2 \quad \text{(loại)} \end{cases}$

Với $\sin 2x = \frac{2}{3} = \sin\alpha \Leftrightarrow 2x = \alpha + 2k\pi$ hay $\boxed{x = \frac{\alpha}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

và $2x = \pi - \alpha + 2k\pi$ hay $\boxed{x = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + k\pi}$ $(k \in Z)$

b/ Trong trường hợp tổng quát ta có: $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 2x + 4a\sin 2x - 4 = 0$$

Đặt $\sin 2x = t$; $|t| \leq 1$ ta có phương trình: $f(t) = 3t^2 - 4at - 4 = 0$ $(|t| \leq 1)$

Phương trình này có nghiệm $t \in (-1, 1)$ khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l} f(-1)f(1) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(1) > 0 \\ f(-1) > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (-1-4a)(-1+4a) \leq 0 \\ \begin{cases} 4a^2 + 12 \geq 0 \\ -1 + 4a > 0 \\ -1 - 4a > 0 \\ -1 < -\frac{2a}{3} < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow |a| \geq \frac{1}{4}$$

Bài 36

Giải bất phương trình: $$\frac{tg\frac{\pi x}{4}+2x+3}{\sqrt{4-x^2}-x}>0$$

Đ.H. Xây dựng Hà Nội (1994)

GIẢI

Ta có: $\frac{tg\frac{\pi x}{4}+2x+3}{\sqrt{4-x^2}-x}>0$ Điều kiện : $\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{4}\neq 0\\ 4-x^2\geq 0\\ \sqrt{4-x^2}-x\neq 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \pm 2\\ -2\leq x\leq 2\\ x\neq \pm\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}<x<2\\ -2<x<-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Xét $f(x)=tg\frac{\pi x}{4}+2x+3$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{\pi}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}+2>0$ nên f(x

đồng biến trên D và $f(x)=0$ khi $x=-1$

Xét $g(x)=\sqrt{4-x^2}-x$ có đạo hàm $g'(x)=-\left(\frac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}\right)$,

với $x\neq\sqrt{2}$ và $-2<x<2$ thì $g'(x)<0$ nên g(x) nghịch biến ;

$g(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$. Ta có bảng xét dấu sau:

x	-2		-1		$\sqrt{2}$		2
$tg\frac{\pi x}{4}+2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{4-x^2}-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{tg\frac{\pi x}{4}+2x+3}{\sqrt{4-x^2}-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Nghiệm số của bất phương trình là: $\boxed{-1<x<\sqrt{2}}$

Nghiệm số của bất phương trình là $\boxed{-1 < x < \sqrt{2}}$

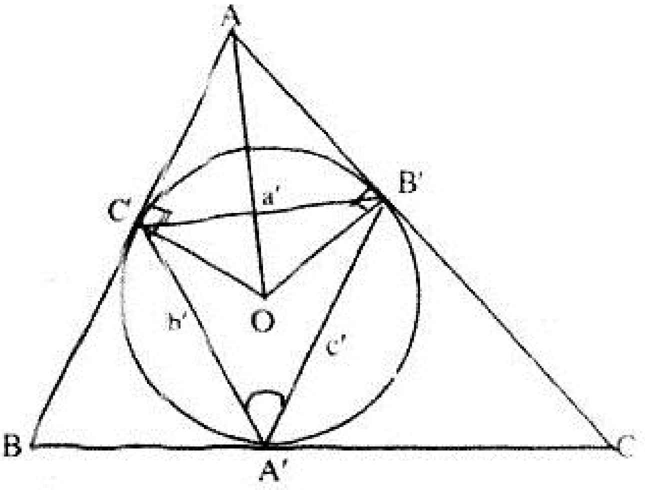
Bài 37

Cho tam giác ABC có các cạnh AC = b ; BC = a ; AB = c. Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh ở A', B', C' (đối diện với các đỉnh A, B, C).

Tam giác A'B'C' có cạnh A'C' = b' ; B'C' = a' ; A'B' = c'. Chứng minh rằng: $\dfrac{a'}{a} + \dfrac{b'}{b} = 2\sin\dfrac{C}{2}\left(\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2}\right)$

Đ.H. Y Dược TP. Hồ Chí Minh (1994)

GIẢI



Ta có: OC' = OB' = r = bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC nhưng với tam giác A'B'C' thì OC', OB' lại là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

AC'OB' là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{C'OB'} = \pi - \widehat{C'AB'} = \pi - A$$

$$A' = \frac{1}{2}\widehat{C'OB'} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

suy ra $\sin A' = \cos\dfrac{A}{2}$

Trong tam giác A'B'C' ta có: $\dfrac{B'C'}{\sin A'} = \dfrac{a'}{\cos\dfrac{A}{2}} = 2OC' = 2r$ (1)

Trong tam giác ABC ta có: $r = (p-a)\text{tg}\dfrac{A}{2}$ (2)

Thế r ở (2) vào (1): $a' = 2r\cos\dfrac{A}{2} = 2(p-a)\text{tg}\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

$$= (b+c-a)\sin\frac{A}{2}$$

Do đó: $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin A}.\sin\dfrac{A}{2}$

$$= \left(\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin A}\right)\sin\frac{A}{2}$$

$$= \cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (3)$$

Tương tự, ta có: $\frac{b'}{b} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$ (4)

Cộng (3) và (4) ta có đpcm: $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)$

Bài 38

Cho phương trình: $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m\mathrm{tg}2x$ **(1)**

1. Giải (1) khi m = $\frac{1}{8}$

2. Với giá trị nào của m thì (1) có nghiệm.

Đ.H Kinh tế TP. Hồ Chí Minh (1994)

GIẢI

Ta có: $\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m\mathrm{tg}2x$

Điều kiện: $\cos^2 x - \sin^2 x \neq 0$

Hay $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

1. Khi $m = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{4}\mathrm{tg}2x$

$$\Leftrightarrow \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x)}{\cos 2x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin 2x;\ (\cos 2x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 & \text{suy ra } \cos 2x = 0 \quad \text{(loại)} \\ \sin 2x = \frac{-4}{3} & \text{(loại)} \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

2. Từ (1) ta suy ra:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 2m\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 8m\sin 2x - 4 = 0 \qquad (2$$

Đặt $t = \sin 2x\ (-1 < t < 1) \Leftrightarrow 8m = f(t) = \frac{-3t^2 + 4}{t}$

Đạo hàm $f'(t) = \frac{-3t^2 - 4}{t^2} < 0$

Bảng biến thiên:

t	-1		0		1
$f'(t)$		$-$	||	$-$	
$f(t) = 8m$	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

(2) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} 8m < -1 \\ 8m > 1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\boxed{\begin{array}{l} m < \frac{-1}{8} \\ m > \frac{1}{8} \end{array}}\right.$$

Bài 39

Giải bất phương trình: **sinx + sin3x < sin2x**

Phân hiệu Đ.H. Luật TP. Hồ Chí Minh (1994)

GIẢI

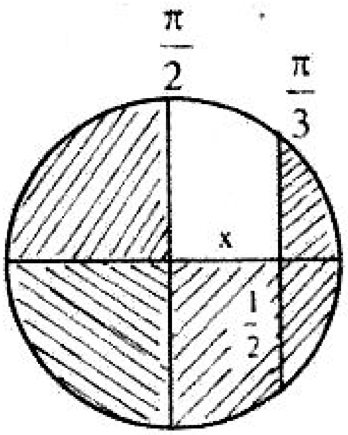
Ta có: $\sin x + \sin 3x < \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x - \sin 2x < 0$

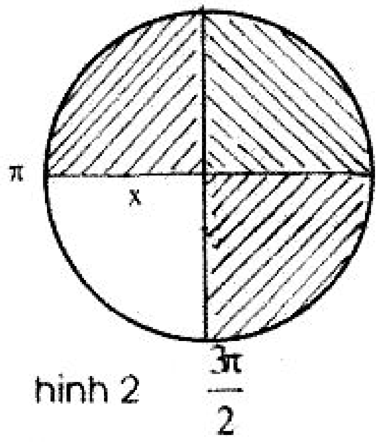
$\Leftrightarrow \sin 2x(1 - 2\cos x) > 0$

Do đó: $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2x > 0 \\ 1 - 2\cos x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2x < 0 \\ 1 - 2\cos x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\sin x\cos x > 0 \\ \cos x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sin x\cos x < 0 \\ \cos x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0 \\ 0 < \cos x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

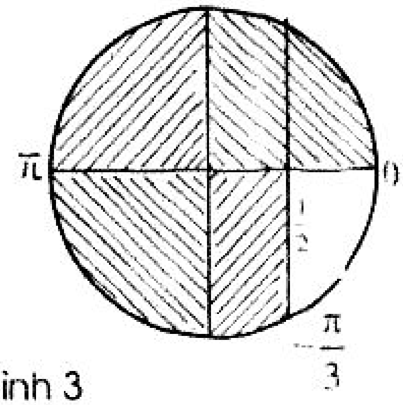
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x > 0 \\ 0 < \cos x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \text{(h1)} \\ \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi & \text{(h2)} \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi & \text{(h3)} \end{array}\right.}$$



hình 1



hình 2



hình 3

Bài 40

Giải phương trình: $\mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}^2y + \mathrm{cotg}^2(x + y) = 1$

Đ.H. Ngoại thương cơ sở II (1994)

GIẢI

Ta có: $\mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}^2y + \mathrm{cotg}^2(x + y) = 1$ (1)

Biết $\mathrm{cotg}(x + y) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(x + y)} = \dfrac{1 - \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{tg}x\,\mathrm{cotg}(x + y) + \mathrm{tg}y\,\mathrm{cotg}(x + y) = 1 - \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y$

$\Rightarrow$ $\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y + \mathrm{tg}x\,\mathrm{cotg}(x + y) + \mathrm{tg}y\,\mathrm{cotg}(x + y) = 1$ (2)

Thế (1) vào vế phải của (2) ta có:

$\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y + \mathrm{tg}x\,\mathrm{cotg}(x+y) + \mathrm{tg}y\,\mathrm{cotg}(x+y) = \mathrm{tg}^2x + \mathrm{tg}^2y + \mathrm{cotg}^2(x+y)$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y+2\mathrm{tg}x\mathrm{cotg}(x+y)+ 2\mathrm{tg}y\mathrm{cotg}(x+y)=2\mathrm{tg}^2x+2\mathrm{tg}^2y+2\mathrm{cotg}^2(x+y)$

$\Leftrightarrow (\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y)^2 + [\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}(x+y)]^2 + [\mathrm{tg}y - \mathrm{cotg}(x + y)]^2 = 0$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi: $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}y = \mathrm{cotg}(x+y)$

Suy ra: $\mathrm{tg}^2x = \mathrm{tg}^2y = \mathrm{cotg}^2(x+y)$

Do đó, từ (1) ta có: $tg^2x = tg^2y = cotg^2(x+y) = \dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad tgx = tgy = cotg(x+y) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Với $tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ có nghiệm $\boxed{x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi}$

  $tgx = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ có nghiệm $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $tgy = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ có nghiệm $\boxed{x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi}$

  $tgy = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ có nghiệm $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 1

Cho tam giác ABC với $A \geq B \geq C$ (A, B, C là ba góc của tam giác).

Chứng minh rằng: $\dfrac{h_a}{h_b} + \dfrac{h_b}{h_c} + \dfrac{h_c}{h_a} \geq \dfrac{h_b}{h_a} + \dfrac{h_a}{h_c} + \dfrac{h_c}{h_b}$

trong đó h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao xuất phát từ A, B, C

Đ.H. Sư phạm TP. Hồ Chí Minh (1994)

GIẢI

Với $A \geq B \geq C$ ta suy ra $a \geq b \geq c$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{h_a}{h_b} + \dfrac{h_b}{h_c} + \dfrac{h_c}{h_a} \geq \dfrac{h_b}{h_a} + \dfrac{h_a}{h_c} + \dfrac{h_c}{h_b}$ (1)

Biết $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$

Từ đó ta có: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_b}{h_a}$; $\dfrac{a}{c} = \dfrac{h_c}{h_a}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{h_c}{h_b}$

(Tỷ số hai cạnh tam giác, tỷ lệ nghịch với hai đường cao tương ứng)

Do có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{c}$

$$\Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b \geq a^2c + c^2b + b^2a$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \geq 0 \qquad (2)$$

Với $c \geq b \geq c$ thì (2) luôn đúng nên (1) đúng

Vậy trong mọi tam giác với $A \geq B \geq C$ ta luôn có:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}\ge\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}+\frac{h_c}{h_b}$$

Bài 42

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2 \qquad (1)$$

Đ.H. Ngoại thương

GIẢI

Ta cần chứng minh: $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}<2$ (1)

Mẫu số: $\cos A+\cos B+\cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)+1$

$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1 = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1>0$

Do mẫu $\cos A+\cos B+\cos C>0$ nên bất đẳng thức (1) tương đương với: $\sin A+\sin B+\sin C<2(\cos A+\cos B+\cos C)$

Biết $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}>0$ và $0<\sin C\le 1$

Nên $\cos A+\cos B\ge\sin C\cos A+\sin C\cos B$ (2)

Tương tự: $\cos B+\cos C\ge\sin A\cos B+\sin A\cos C$ (3)

$\cos C+\cos A\ge\sin B\cos C+\sin B\cos A$ (4)

Cộng (2), (3) và (4) vế với vế ta có:

$2(\cos A+\cos B+\cos C)\ge\sin(B+C)+\sin(A+C)+\sin(A+B)$

$= \sin A+\sin B+\sin C$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi đồng thời $\sin A=1$, $\sin B=1$, $\sin C=1$ nghĩa là một tam giác có 3 góc vuông, vậy dấu "=" không xảy ra nên:

$2(\cos A+\cos B+\cos C)>\sin(B+C)+\sin(A+C)+\sin(A+B)$

$=\sin A+\sin B+\sin C$

Bài 43

Trong tam giác ABC, biết: $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{3}$

Chứng tỏ rằng: $c=\dfrac{a+b}{2}$

Đ.H. Kiến trúc TP. HCM. (1994)

GIẢI

Ta có: $$tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \qquad (2)$$

Biết sinasinb = $\frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$ nên (2) tương đương:

$$\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \qquad (3)$$

Nhân 2 vế của (3) với $\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) \neq 0$ ta có:

$$\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}(\sin A + \sin B) = \sin(A + B) = \sin C \Leftrightarrow \sin A + \sin B = 2\sin C \qquad (4)$$

Từ định lý hàm số sin ta suy ra: $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\sin B = \frac{b}{2R}$

và $\sin C = \frac{c}{2R}$ nên từ (4) ta có: $\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} = 2\frac{c}{2R} \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$

ĐỀ THI NĂM 1995

Bài 44

1. **Giải phương trình: $\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \frac{1}{4}$ (1)**
2. **Tìm tất cả các nghiệm của phương trình (1) thoả mãn:**

$$\sqrt{2}\cos 2x - \sin 4x \leq 0$$

Đ.H. Bách khoa TP. HCM. (1995)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^3x\cos x - \cos^3x\sin x = \frac{1}{4}$ (1)

$\Leftrightarrow \sin x\cos x(\sin^2x - \cos^2x) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin2x.\cos2x = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin4x = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \sin4x = -1 \Leftrightarrow 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

2. Ta có: $\sqrt{2}\cos2x - \sin4x \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos2x - 2\sin2x\cos2x \le 0$

$\Leftrightarrow \cos2x(\sqrt{2} - 2\sin2x) \le 0$ (2)

Với nghiệm của (1): $2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Thế vào (2): $\cos\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\left[\sqrt{2} - 2\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right]$ (3)

Với $k = 0, 2, 4$...chẵn suy ra (3) $= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2} + \sqrt{2}\right] > 0$ không thoả mãn (2).

Với $k = 1, 3, 5$... lẻ suy ra (3) thoả mãn (2) với dấu =.

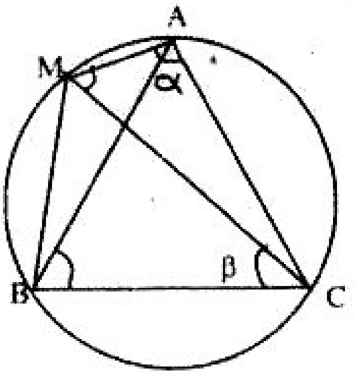
Vậy nghiệm của (1) thoả mãn (2) là $\boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}}$ với $k \in Z$ và k lẻ.

Bài 45

ABC là tam giác đều. Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp với tam giác ABC, lấy điểm M. Biết MA = 1, MB = 2. Tính MC.

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (1995)

GIẢI



Ta có: $MA = 1$; $MB = 2$; $\widehat{AMB} = 120^0$

Trong tam giác AMB, theo định lý hàm số cosin ta có: $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB\cos\widehat{AMB}$

$= 1^2 + 2^2 - 2.1.2.\cos120^0$

$= 1 + 4 + 4\cos60^0 = 7$

Cạnh tam giác đều ABC là $AB = \sqrt{7}$

Cạnh tam giác đều ABC là AB = $\sqrt{7}$

Biết $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^0$

(góc nội tiếp chắn cùng một cung)

Trong tam giác MAC, ta có:

$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA.MC\cos\widehat{AMC}$$

$$7 = 1^2 + MC^2 - 2.1.MC\cos 60^0$$

$$= 1 + MC^2 - 2MC\left(\frac{1}{2}\right)$$

Rút gọn, ta được phương trình bậc hai:

$$MC^2 - MC - 6 = 0$$

Giải ra, ta được MC = 3 và MC = −2 (loại)

Cách 2. Tính cạnh tam giác như cách 1 được AB = $\sqrt{7}$

Đặt $\widehat{MAC} = \alpha$ thì $\widehat{MBC} = \pi - \alpha$

Áp dụng định lý hàm số cosin, trong các tam giác MAC và MBC ta có:

$$MC^2 = MA^2 + AC^2 - 2MA.AC\cos\alpha \quad = MB^2 + BC^2 - 2MB.BC\cos(\pi-\alpha)$$

$$= MA^2 + AC^2 - 2MA.AC\cos\alpha \quad = MB^2 + BC^2 + 2MB.BC\cos\alpha$$

$$= 1^2 + 7 - 2.1.\sqrt{7}\cos\alpha \quad = 2^2 + 7 + 2.2\sqrt{7}\cos\alpha$$

$$MC^2 = 8 - 2\sqrt{7}\cos\alpha \quad = 11 + 4\sqrt{7}\cos\alpha \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra: $\cos\alpha = \dfrac{-1}{2\sqrt{7}}$ và $MC^2 = 8 - 2\sqrt{7}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{7}}\right) = 9$

$$\Leftrightarrow \ MC = 3$$

Cách 3. Tính cạnh tam giác như cách 1,

ta có AB = $\sqrt{7}$.

Đặt $\widehat{BCM} = \beta$ suy ra $\widehat{MBC} = 180^0 - (\widehat{BMC} + \beta)$

$$= 180^0 - (60^0 + \beta) = 120^0 - \beta.$$

Trong tam giác BCM, theo định lý hàm số sin, ta có:

$$\frac{MB}{\sin\beta} = \frac{MC}{\sin\widehat{MBC}} = \frac{BC}{\sin 60^0}$$

Hay $$\frac{2}{\sin\beta} = \frac{MC}{\sin(120^0-\beta)} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \qquad (1)$$

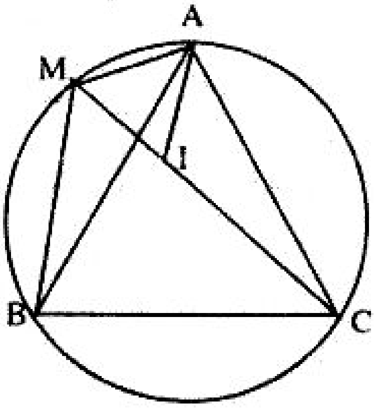
Từ (1) ta suy ra:

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ và } \cos\beta = \sqrt{1-\frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\sin(120^0-\beta) = \sin(60^0+\beta)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} + \sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Cũng từ (1) ta suy ra: $MC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\sin(120^0-\beta) = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = 3$

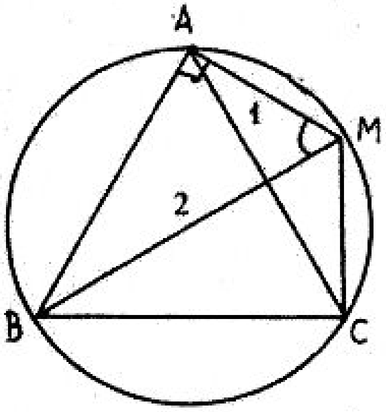


Cách 4.

Thực hiện phép quay tâm A một góc $+60^0$, điểm B có ảnh là điểm C, điểm M có ảnh là điểm I trên MC sao cho ΔAMI là tam giác đều ($\widehat{AMI} = 60^0$). Do đó ảnh của ΔAMB là $\Delta AIC \Rightarrow MB = IC$

và $MC = MI + IC = MA + MB = 3$

Nếu lấy điểm M trên cung lớn AB, như ở hình bên.



Ta có: $\widehat{AMB} = 60^0$

Trong tam giác MAB theo định lý hàm số cos, ta có: $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB\cos60^0$

$$= 1 + 4 - 2.1.2\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

Khi đó tam giác MAB có:

$MB^2 = 2^2 = MA^2 + AB^2 = 1 + 3$ nên ΔMAB vuông góc ở A và M cũng từ trung điểm của cung nhỏ AC.

Bài 46

Giải phương trình: $$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$$

Đ.H. An ninh (cơ sở phía Nam, 1995)

GIẢI

Ta có: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}$

Biết $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

$= 4\sin x \cos x \cos 2x$

Từ (1) ta suy ra: $4\sin x\cos 2x + 2\cos 2x = 2$

$\Rightarrow \quad 4\sin x\cos 2x = 2(1 - \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin x\cos 2x = 4\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = \sin x$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x = \sin x$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm: $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

- Với $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (loại vì $x \neq \frac{k\pi}{4}$)
- Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

và $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 47

Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1 \\ \sin 5A + \sin 5B + \sin 5C = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác đó có ít nhất một góc bằng 36^0

Đ.H. Cần Thơ (1995)

GIẢI

Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2(A + B)$

$= 1 + \cos(A + B)\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right]$

$= 1 - \cos C\,(2\cos A\cos B)$

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

Nếu $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$ thì $\cos A\cos B\cos C > 0$ suy ra tam giác ABC có 3 góc nhọn.

Ta có: $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C = 2\sin\dfrac{5(A+B)}{2}.\cos\dfrac{5(A-B)}{2}+\sin 5C$ (1)

Biết $\sin 5C = \sin 5(\pi-(A+B))$

$= \sin[\pi - 5(A+B)] = \sin 5(A+B)$

$= 2\sin\dfrac{5(A+B)}{2}\cos\dfrac{5(A+B)}{2}$ (2)

Thế (2) vào vế phải của (1) ta được:

$$\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C = 2\sin\frac{5(A+B)}{2}\left[\cos\frac{5(A-B)}{2}+\cos\frac{5(A+B)}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{5(A+B)}{2}.\left(2\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{5(\pi-C)}{2}\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{5C}{2}\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}$$

Theo giả thiết ta phải có: $\cos\dfrac{5A}{2}=0$ hoặc $\cos\dfrac{5B}{2}=0$ hoặc $\cos\dfrac{5C}{2}=0$

Nếu $\cos\dfrac{5A}{2}=0$ thì $\dfrac{5A}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow A=\dfrac{\pi}{5}+2k\dfrac{\pi}{5}$

Vì A là góc nhọn, ta chọn k = 0 suy ra $A=\dfrac{\pi}{5}=36^0$

Bài 48

Giải phương trình lượng giác: $\dfrac{3(\cos x+\cot gx)}{\cot gx-\cos x}-2\sin x=2$

Đ.H. Công đoàn (1995)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{3(\cos x+\cot gx)}{\cot gx-\cos x}-2\sin x=2$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cot gx\neq\cos x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases}$

Từ (1) ta có phương trình tương đương:

$$\frac{3\left(\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}\right)}{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x} = 2\sin x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3\cos x(\sin x + 1)}{\cos x(1 - \sin x)} = 2(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(\sin x + 1) = 2(1 + \sin x)(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \sin x)[3 - 2(1 - \sin x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + \sin x = 0 \\ 3 - 2 + 2\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \quad \text{(loại)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

và $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 49

Giải phương trình lượng giác: $\sin^2 2x - \cos^2 8x = 0{,}5\cos 10x$

Đ.H. Văn Lang TP. Hồ Chí Minh

GIẢI

Ta có: $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \frac{1}{2}\cos 10x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 + \cos 16x}{2} = \frac{\cos 10x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 16x + \cos 4x + \cos 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 10x\cos 6x + \cos 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 10x(2\cos 6x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos 10x = 0 \\ 2\cos 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

- Vớii $\cos 10x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}}$ $(k \in Z)$
- Vớii $2\cos 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 6x = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}} \quad (k \in Z)$$

Bài 50

Tam giác ABC có các góc đều nhọn, có các cạnh a, b, c và x, y, z à độ dài của các phân giác tương ứng.

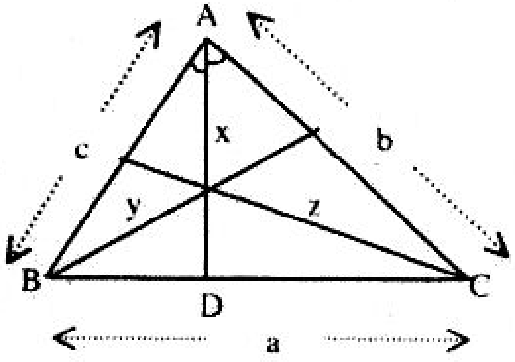
Chứng minh rằng: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Đ.H. Văn Lang TP. Hồ Chí Minh (1995)

GIẢI

Gọi S là diện tích tam giác ABC, ta có: $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cx\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bx$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}x(c+b)\sin\frac{A}{2}$$



Từ đó suy ra: $2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = x(c+b)\sin\frac{A}{2}$

Hay $x = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} < \dfrac{2bc}{b+c}$

Suy ra: $\frac{1}{x} > \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Tương tự: $\frac{1}{y} > \frac{a+c}{2ac} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ (2)

$\frac{1}{z} > \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Bài 51

Giải phương trình: $\log_{0,25}(\sin\frac{x}{2} - \sin x) + \log_4(\sin\frac{x}{2} + \cos 2x) = 0$

Đ.H. Dược Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $\log_{0,25}(\sin\frac{x}{2} - \sin x) + \log_4(\sin\frac{x}{2} + \cos 2x) = 0$ (1)

Biến đổi: $\log_{0,25}(\sin\frac{x}{2} - \sin x) = \log_{\frac{1}{4}}(\sin\frac{x}{2} - \sin x)$

$= \log_{4^{-1}}(\sin\frac{x}{2} - \sin x)$

$= -\log_4(\sin\frac{x}{2} - \sin x)$

Do đó (1) trở thành: $\log_4(\sin\frac{x}{2} + \cos 2x) = \log_4(\sin\frac{x}{2} - \sin x)$

Phương trình này dẫn đến giải hệ: $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \sin x > 0 \\ \cos 2x = -\sin x \end{cases}$ (2)

- Với $\cos 2x = -\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z) \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $\sin\frac{x}{2} > \sin x$, ta được các nghiệm:

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad \text{và} \quad \boxed{x = \frac{7\pi}{6} + 4k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 52

Cho ba số dương x, y, z thoả mãn $xy + yz + xz = 1$.

Tính giá trị của biểu thức:

$$M = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Đ.H. Dược Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $M = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$

Vì x, y, z > 0 nên có thể đặt $x = tg\alpha$; $y = tg\beta$; $z = tg\gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do $xy + yz + xz = 1 \Leftrightarrow tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\gamma tg\alpha = 1$

hay $tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma = 1 - tg\gamma tg\alpha$

$\Rightarrow tg\beta(tg\alpha + tg\gamma) = 1 - tg\gamma tg\alpha$

Suy ra: $\dfrac{tg\alpha + tg\gamma}{1 - tg\gamma tg\alpha} = \dfrac{1}{tg\beta} = cotg\beta$

$$\Rightarrow tg(\alpha + \gamma) = cotg\beta \qquad (1)$$

Từ (1) chứng tỏ $(\alpha+\gamma)$ và β là hai góc phụ nhau nên $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$

Ta có: $x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)}{1+tg^2\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta\cos^2\gamma}}$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} = 1 - tg\beta tg\gamma = 1 - yz$$

Tương tự:

$$y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\cos\alpha\cos\gamma}} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos\gamma} = 1-xz$$

$$z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\sqrt{\frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}} = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} = 1-xy$$

Do đó: $M = (1-yz) + (1-xz) + (1-xy) = 3-(yz + xz + xy) = 2$

Vậy giá trị của biểu thức: $\boxed{M = 2}$

Bài 53

Chứng tỏ rằng nếu trong tam giác ABC ta có:

$\text{tg}A + \text{tg}B = 2\text{cotg}\,\frac{C}{2}$ thì ABC là tam giác cân

Đ.H. Đà Lạt (1995)

GIẢI

Ta có: $\text{tg}A + \text{tg}B = 2\text{cotg}\frac{C}{2}$ (1)

Biết $A + B + C = \pi$ nên $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

và $\text{tg}A + \text{tg}B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \frac{\sin C}{\cos A\cos B} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B}$

Do đó (1) tương đương: $\frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A\cos B} = 2\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ (2)

vì $\cos\frac{C}{2} > 0$ nên từ (2) ta suy ra: $2\cos A\cos B = 2\sin^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 1 - \cos C = 1 + \cos(A+B)$

suy ra $\cos(A-B) = 1 = \cos 0^0$

Do $-\pi < A-B < \pi$ nên $A-B = 0 \Rightarrow A = B$

Vậy tam giác ABC là tam giác cân tại C

Cách khác: Từ (1) ta suy ra: $\text{tg}A + \text{tg}B - 2\text{tg}\frac{A+B}{2} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\text{tg}A - \text{tg}\frac{A+B}{2} + \text{tg}B - \text{tg}\frac{A+B}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A\cos\frac{A+B}{2}}+\frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B\cos\frac{A+B}{2}}=0$$ vì $\cos\frac{A+B}{2}\neq 0$ nên rút gọn ta có: $\sin\frac{A-B}{2}\left(\frac{1}{\cos A}-\frac{1}{\cos B}\right)=0$

Do đó $\sin\frac{A-B}{2}=0$ hoặc $\cos A=\cos B$ suy ra A=B và ΔABC là tam giác cân tại C.

Bài 54

Cho tam giác cân ABC với BC = a , AB = AC = b , $\widehat{BAC}=20^0$. Chứng minh $a^3+b^3=3ab^2$

Đ.H. Đà Nẵng (1995)

GIẢI

Trong tam giác cân ABC ta có: $AB=AC=b$; $BC=a$

$$\widehat{BAC}=20^0$$

Đường cao AH cũng là đường phân giác nên $\widehat{BAH}=\widehat{HAC}=10^0$

Trong tam giác ABH ta có: $\sin\widehat{BAH}=\frac{BH}{AB}$ hay $BH=AB\sin\widehat{BAH}$

$$\frac{a}{2}=b\sin10^0$$

$$\Rightarrow \quad a=2b\sin10^0$$

Theo bài ra, ta có: $a^3+b^3=3ab^2$

Tính vế trái của (1): $a^3+b^3=(2b\sin10^0)^3+b^3$

$$\begin{aligned}
&= 8b^3\sin^3 10^0+b^3\\
&= 2b^3(4\sin^3 10^0+\tfrac{1}{2})\\
&= 2b^3(4\sin^3 10^0+\sin30^0)\\
&= 2b^3(4\sin^3 10^0+3\sin10^0-4\sin^3 10^0)\\
&= 2b^3.(3\sin10^0)\\
&= 3b^2.(2b\sin10^0)\\
&= 3b^2.a=3ab^2 \qquad \text{(đpcm)}
\end{aligned}$$

** $\sin30^0=\sin3.10^0=3\sin10^0-4\sin^3 10^0$ (vì $\sin3a=3\sin a-4\sin^3 a$)

Bài 55

Giải phương trình: $(2\sin x+1)(2\sin2x-1)=3-4\cos^2x$ **(1)**

Đ.H. Đà Nẵng (1995)

GIẢI

Ta có: $(2\sin x+1)(2\sin2x-1)=3-4\cos^2x$ (1)

Tính vế phải của (1): $3-4\cos^2x=3-4(1-\sin^2x)=4\sin^2x-1$

$$= (2\sin x + 1)(2\sin x - 1)$$

Do đó phương trình (1) có thể viết thành:

$$(2\sin x + 1)((2\sin 2x - 1) - (2\sin x - 1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(4\sin x\cos x - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)\, 2\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = 0 \\ \sin x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{-1}{2} \\ \sin x = 0. \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

• Với $\sin x = -\frac{1}{2}$ suy ra: $\boxed{x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

và $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

• Với $\sin x = 0$ suy ra $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

• Với $\cos x = \frac{1}{2}$ ta có nghiệm: $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Vậy phương trình đã cho có các họ nghiệm là:

$$x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ x = k\pi \ ;$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ và } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ với } (k \in Z)$$

Bài 56

Giải phương trình:

$(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0$

1) Giải phương trình với $m = 2$.

2) Tìm m để phương trình có 1 nghiệm $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$

Đ.H. Huế (1995)

GIẢI

Ta có: $(4-6m)\sin^3 x + 3(2m-1)\sin x + 2(m-2)\sin^2 x\cos x - (4m-3)\cos x = 0$

Thay $\cos x = 0$ vào phương trình này thì vế trái $= \pm 1 \neq 0 \Rightarrow \cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1), nên ta chia 2 vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được:

$$(4-6m)tg^3x + 3(2m-1)tgx(1+tg^2x) + 2(m-2)tg^2x - (4m-3)(1+tg^2x)$$

$$\Leftrightarrow \ tg^3x - (2m+1)tg^2x + 3(2m-1)tgx - (4m-3) = 0$$

$\Leftrightarrow (tgx - 1)(tg^2x - 2mtgx + 4m - 3) = 0$

1) Giải phương trình khi m = 2

Khi m = 2 thì (1) $\Leftrightarrow (tgx - 1)(tg^2x - 4tgx + 5)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} tgx - 1 = 0 & x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ tg^2x - 4tgx + 5 = 0 & \text{(vô nghiệm vì } \Delta' < 0) \end{cases}$$

Vậy khi m=2 thì phương trình có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

2) Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Ta có: $(tgx-1)(tg^2x - 2mtgx + 4m - 3) = 0$ (2)

Đặt $t = tgx \Rightarrow$ phương trình (2) trở thành: $(t - 1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0$

Để phương trình (1) có 1 nghiệm $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ thì phương trình (2) có 1 nghiệm $t \in [0;1]$.

Phương trình (2) luôn có 1 nghiệm t = 1 với mọi m, do đó để phương tinh (2) chỉ có một nghiệm $t \in [0;1]$ thì phương trình:

$t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ (3) chỉ có một nghiệm duy nhất t=1 hoặc hông không có nghiệm nào trên đoạn $[0;1]$

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất $t=1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow m=1$ (*)

Phương trình (3) không có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$

TH1: Phương trình (3) vô nghiệm $\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 < 0$

$\Rightarrow 1 < m < 3$ (**)

TH2: Phương trình (3) có 2 nghiệm $t_1, t_2 \notin (0,1) \Rightarrow \Delta \geq 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 1 \\ m \geq 3 \end{array}\right.$$

Ta giả sử phương trình (3) có một nghiệm $t \in (0,1)$.

Từ (2) ta suy ra: $m = \frac{t^2 - 3}{2t - 4} = f(t)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2}\right]$,

vì $t \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2}\right] > 0 = \frac{1}{2}\left[\frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2}\right]$

$\Rightarrow f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0;1]$

$\Rightarrow f(0) \le f(t) \le f(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le f(t) \le 1$

$\Rightarrow \frac{3}{4} \le m \le 1$

$\Rightarrow$ Để phương trình (3) có nghiệm $t \in [0,1]$ thì $\frac{3}{4} \le m \le 1$

$\Rightarrow$ Để phương trình (3) có 2 nghiệm $t_1, t_2 \notin [0,1] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{3}{4} \\ m > 1 \end{array}\right.$ (***)

Từ (*), (**), (***) $\Rightarrow$ để phương trình (2) có một nghiệm $t \in [0,1] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m < \frac{3}{4} \\ m \ge 1 \end{array}\right.$

Đạo hàm $f'(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(t-2)^2}\right] \ge 0$

Khi $t \in [0;1]$ ta có: $f(0) \le \frac{t^2 - 3}{2t - 4} \le f(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le \frac{t^2 - 3}{2t + 4} \le 1$

suy ra $\frac{3}{4} \le m \le 1$

Vậy (3) vô nghiệm trên đoạn $[0,1]$ hay có một nghiệm bằng 1 nếu $m \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup [1, +\infty)$

Cách khác. Ta có: $(tgx - 1)(tg^2x - 2mtgx + 4m - 3) = 0$ (4)

Đặt $tgx = t$ ta được $(t-1)(t^2 - 2mt + 4m - 3) = 0$

Phương trình có một nghiệm $t = 1\ \forall m$

* Do đó để phương trình (4) có 1 nghiệm $t \in [0;1]$

- Phương trình $t^2 - 2mt + 4m - 3 = 0$ vô nghiệm hoặc

có 1 nghiệm $t_1 = t_2 = 1$

$$\left[\begin{array}{l}\Delta' < 0\\ \begin{cases}\Delta' = 0\\ f(1) = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2 - (4m - 3) < 0\\ \begin{cases}f(1) = 0\\ m^2 - 4m + 3 = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1 < m < 3\\ m = 1\end{array}\right. \Rightarrow 1 \le m < 3$$

- (4) có nghiệm thoả mãn $t_1 \le t_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' \ge 0\\ af(0) > 0\\ \dfrac{S}{2} < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 4m + 3 \ge 0\\ 4m - 3 > 0\\ m < 0\end{cases} \quad \text{hệ vô nghiệm}$$

- (4) có nghiệm thoả mãn $1 \le t_1 \le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' \ge 0\\ af(1) \ge 0\\ \dfrac{S}{2} \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 4m + 3 \ge 0\\ 2m - 2 \ge 0\\ m \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow m \ge 3 \text{ hoặc } m = 1$$

- (4) có nghiệm thoả mãn $t_1 < 0 < 1 \le t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' \ge 0\\ af(0) < 0\\ af(1) \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2 - 4m + 3 \ge 0\\ 4m - 3 < 0\\ 2m - 2 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$

Bài 57

Giải phương trình lượng giác sau: $tg2x + cotgx = 8\cos^2 x$

Đ.H. Giao thông (1995)

GIẢI

Ta có: $tg2x + cotgx = 8\cos^2 x$ (1)

Điều kiện $\begin{cases}\cos 2x \ne 0\\ \sin x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ne \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x \ne k\pi\end{cases}$

Từ (1) ta suy ra:

$$\frac{\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x}{\cos 2x \sin x} = 8\cos^2 x \quad (\cos 2x \sin x \ne 0)$$

$$\frac{\cos x}{\cos 2x \sin x} = 8\cos^2 x$$

$$\cos x = 8\cos^2 x \cos 2x \sin x$$

$$\cos x(1-8\cos x\cos 2x\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ 1-8\cos x\cos 2x\sin x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ 2\sin 4x=1\end{cases}$$

- Với $\cos x=0$ ta có nghiệm: $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\pi}$ $(k\in Z)$
- Với $\sin 4x=\frac{1}{2}$ ta có nghiệm: $\boxed{x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}}$ $(k\in Z)$

$\boxed{x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}}$ $(k\in Z)$

Bài 58

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có hệ thức:

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2\sin B\sin C\cos A+2\sin C\sin A\cos B+2\sin A\sin B\cos C$$

Đ.H. Giao thông (1995)

GIẢI

Ta có:

$$2\sin B\sin C\cos A+2\sin A\sin B\cos C=2\sin B(\sin C\cos A+\sin A\cos C)$$
$$=2\sin B.\sin(A+C)$$
$$=2\sin^2B \quad (1)$$

Tương tự:

$$2\sin A\sin B\cos C+2\sin C\sin A\cos B=2\sin A(\sin B\cos C+\sin C\cos B)$$
$$=2\sin A.\sin(B+C)$$
$$=2\sin^2A \quad (2)$$

$$2\sin C\sin A\cos B+2\sin C\sin B\cos A=2\sin C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$$
$$=2\sin C.\sin(A+B)=2\sin^2C \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2\sin B\sin C\cos A+2\sin C\sin A\cos B+2\sin A\sin B\cos C$$

Bài 59

Giải phương trình: $\sin^4x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$

Đ.H. Hàng hải (1995)

GIẢI

Ta có: $\sin^4 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$ (1)

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$\cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}[1 - \sin 2x]^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x) \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) từng vế một, ta được:

$$\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}(2 - 2\cos 2x - 2\sin 2x + \cos^2 2x + \sin^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}(3 - 2\cos 2x - 2\sin 2x)$$

Thế (3) vào đề bài, ta có:

$$3 - 2\cos 2x - 2\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x + 2\cos 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}} \right. \quad (k \in Z)$$

Bài 60

Giải phương trình: $\left(\operatorname{tg}x + \frac{1}{4}\operatorname{cotg}x\right)^n = \cos^n x + \sin^n x \quad (n = 2, 3, 4\ldots)$

Đ.H. Hàng hải (1995)

GIẢI

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

vì tgx và cotgx luôn cùng dấu nên: $\left(\left|\text{tg}x + \dfrac{1}{4}\text{cotg}x\right|\right)^n = \left(|\text{tg}x| + \dfrac{1}{4}|\text{cotg}x|\right)^n$

Dấu "=" khi $\text{tg}x = \dfrac{1}{4}\text{cotg}x \Leftrightarrow \text{tg}^2x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \text{tg}x = \pm\dfrac{1}{2}$

các nghiệm số là $x = \text{arctg}\left(\pm\dfrac{1}{2}\right) + k\pi$

Vì $n \in Z$ mà $n > 1$, ta xét trường hợp $n = 2$ và $n > 2$.

Khi $n = 2$ thì vế phải $\cos^n x + \sin^n x = 1$

Do đó: $(\text{tg}x + \dfrac{1}{4}\text{cotg}x)^n = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \text{arctg}\left(\pm\dfrac{1}{2}\right) + k\pi}$

Khi $n > 2$ ta có: $|\cos^n x| \leq \cos^2 x$ và $|\sin^n x| \leq \sin^2 x$

Suy ra: $|\cos^n x + \sin^n x| \leq |\cos^n x| + |\sin^n x| \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{k\pi}{2}$ (loại vì $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$)

Vậy khi $n > 2$ thì phương trình vô nghiệm

Khi $n = 2$ phương trình có nghiệm $x = \text{arctg}\left(\pm\dfrac{1}{2}\right) + k\pi$

Bài 61

Chứng tỏ rằng nếu trong tam giác ABC có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 1 - \cos A + \cos B + \cos C$$

thì ABC là tam giác vuông.

Đ.H. Huế (1995)

GIẢI

Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Và $1 - \cos A + \cos B + \cos C = 2\sin^2\dfrac{A}{2} + 2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Theo bài ra, ta có: $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Do đó suy ra: $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2}$ hay $\text{tg}\frac{A}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

Vậy ΔAIC là tam giác vuông, vuông góc tại A.

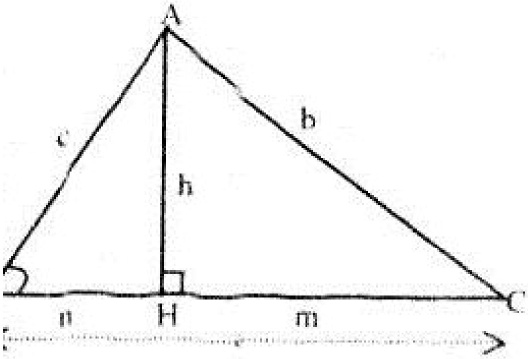
Bài 62

Trong tam giác ABC . H là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là nửa chu vi của các tam giác ABC, ABH và ACH . Cho biết $p^2 = p_1 + p_2^2$. Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

Đ.H. Huế (1995)

GIẢI

Ta có: AH=h ; BC=a ; BH=n ; HC=m



AB = c ; AC = b ; a = n+ m

Chu vi ΔABC là $2p = c + n + m + b$

$$= \frac{h}{\sin B} + h\,\text{cotg}B + h\,\text{cotg}C + \frac{h}{\sin C}$$

$$= h\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} + \frac{\cos C}{\sin C}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}h\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{1}{4}h^2\left(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Chu vi ΔABH là: $2p_1 = c + n + h$

$$= \frac{h}{\sin B} + h\,\text{cotg}B + h = h\left(1 + \text{cotg}\frac{B}{2}\right)$$

$$\text{nên } p_1^2 = \frac{1}{4}h^2\left(1+\cot g\frac{B}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Chu vi ΔACH là: $2p_2 = b + m + h$

$$= \left(\frac{h}{\sin C} + h\cot gC + h\right) = h\left(1+\cot g\frac{C}{2}\right)$$

$$\text{nên } p_2^2 = \frac{1}{4}h^2\left(1+\cot g\frac{C}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

Ta có: $p^2 = p_1^2 + p_2^2$

$$\frac{1}{4}h^2\left(\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}h^2\left[\left(1+\cot g\frac{B}{2}\right)^2 + \left(1+\cot g\frac{C}{2}\right)^2\right] \qquad (4)$$

Khai triển và rút gọn (4) ta được:

$$\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - 1 = \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = 1 = \cot g\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = \frac{\pi}{2} \\ A = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy ΔABC vuông tại A.

Bài 63

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \text{tgy} - \text{tgx} - \text{tgxtgy} = 1 \\ \cos 2y + \sqrt{3}\cos 2x = -1 \end{cases}$

Đ.H. Sư phạm Qui nhơn (1995)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \text{tgy} - \text{tgx} - \text{tgxtgy} = 1 & (1) \\ \cos 2y + \sqrt{3}\cos 2x = -1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta suy ra $\text{tgy} - \text{tgx} = 1 + \text{tgxtgy}$ (3)

Do $1 + \text{tgxtgy} \neq 0$, vì nếu $1 + \text{tgxtgy} = 0$ thì $\text{tgy} = \text{tgx}$ và như vậy thì vế phải $1 + \text{tg}^2x = 0$ là vô lý.

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{tgy} - \text{tgx}}{1 + \text{tgxtgy}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg}(y - x) = 1$$

$$\Leftrightarrow\ y = x + \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{nên } 2y = 2x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{và } \cos 2y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$$

$$(2) \Leftrightarrow \cos 2y + \sqrt{3}\cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow -\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{3} = \left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}} \right. (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}} \right. (k \in Z)$$

Do $\cos x \neq 0$ và $\cos y \neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm:

$$x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad \text{và} \quad y = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad (k \in Z)$$

Bài 54

Giải phương trình: $\sin^4\left(\frac{x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{5}{8}$

Đ.H. Kiến trúc Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $\sin^4\left(\frac{x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{5}{8}$

$$\Leftrightarrow \left[\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right]^2 - 2\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)\cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sin^2\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sin\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

• Với $\sin\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{và} \qquad \frac{2x}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2}} \qquad \text{và} \qquad \boxed{x = \pi + 3k\pi} \quad (k \in Z)$$

• Với $\sin\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{và} \qquad \frac{2x}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi} \qquad \text{và} \qquad x = 2\pi + 3k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 3k\pi} \quad (k \in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{3k\pi}{2}\ ; \quad x = \pi + 3k\pi\ ; \quad x = 3k\pi\ ; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 3k\pi$$

Bài 65

Chứng minh rằng ba góc A, B, C của một tam giác thoả mãn điều kiện: $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$

Đ.H. Kiến trúc Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1 - \sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$

Biến đổi vế trái:

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 2\cos\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + \left(1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}\right)$$

Biết $A + B = \pi - C \Rightarrow \quad 3B + 3B = 3\pi - 3C = 2\pi + (\pi - 3C)$

$$\Rightarrow \frac{3A+3B}{2} = \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) \Rightarrow \cos\frac{3A+3B}{2} = \cos\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right)\right]$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) \quad = -\sin\frac{3C}{2}$$

Do có:

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = -2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{3C}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin\frac{3C}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2} - \cos\frac{3A+3B}{2}\right)$$

$$= 1 - 2\sin\frac{3C}{2}\left[-2\sin\frac{3A}{2}\sin\left(\frac{-3B}{2}\right)\right]$$

$$= 1 - 4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

Chú ý: $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

Bài 66

Trong tam giác ABC, số đo ba góc A, B, C tạo thành một cấp số cộng với $A \geq B \geq C$, giả sử rằng: $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

a/ Hãy tính số đo của các góc A, B, C.

b/ Tính độ dài các cạnh tam giác ABC nếu biết thêm bán kính đường tròn nội tiếp r = 1.

Đ.H. Kiến trúc TP. HCM. (1995)

GIẢI

a/ Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (1)

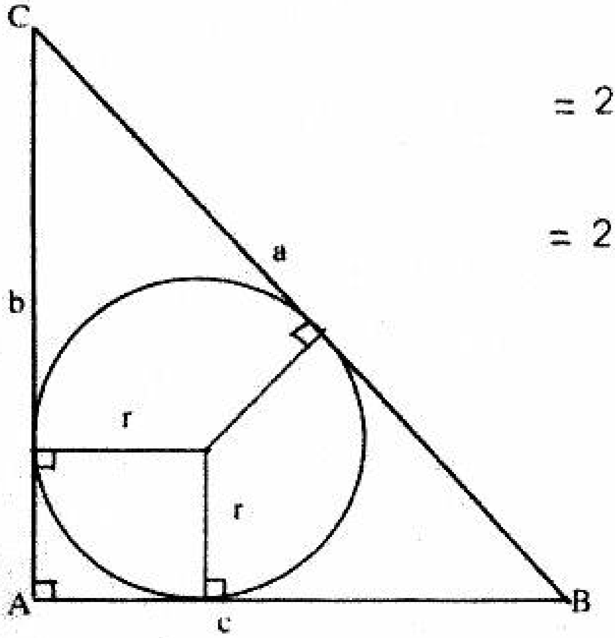
Ba góc A, B, C tạo thành một cấp số cộng nên

$A + C = 2B$ suy ra $A + B + C = 3B = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$

với $A + C = \frac{2\pi}{3}$

Từ (1), ta có vế trái:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + \cos B$$



$$= 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 2.\frac{1}{2}\cos\frac{A-C}{2} + \frac{1}{2} = \cos\frac{A-C}{2} + \frac{1}{2}$$

Do đó từ (1) suy ra:

$$\cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow A - C = \frac{\pi}{3}$$

Kết hợp $A + C = \frac{2\pi}{3}$, ta được $A = \frac{\pi}{2}$ và $C = \frac{\pi}{6}$

b/ ΔABC có cạnh huyền $CB = a$, $\hat{C} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow AB = c = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}a$

$$\Rightarrow AC = b = \sqrt{CB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}bc = pr$

$$= \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}a\right)1$$

Từ đó suy ra: $\boxed{\begin{array}{l} a = 2(\sqrt{3}+1) \\ b = 3 + \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} + 1 \end{array}}$

Bài 67

Giải phương trình: $|\text{tg}x| = \text{cotg}x + \frac{1}{\cos x}$

Đ.H. Kiến trúc TP. HCM. (1995)

GIẢI

Ta có: $|\text{tg}x| = \text{cotg}x + \frac{1}{\cos x}$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Xét 2 trường hợp $\text{tg}x > 0$ và $\text{tg}x < 0$

- Với $\quad tgx > 0$

Ta có: $\quad tgx = cotgx + \dfrac{1}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \cos^2 x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \sin x = 1 & \rightarrow & \cos x = 0 \quad \text{(loại)} \\ \sin x = \dfrac{-1}{2} & \rightarrow & \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi & (k \in Z) \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi & \text{(loại)} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- Với $\quad tgx < 0$, ta có: $\quad -tgx = cotgx + \dfrac{1}{\cos x}$

$$-\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x$$
$$= 1 - \sin^2 x + \sin x$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

Suy ra: $\cos x = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$ (loại)

Vậy phương trình chỉ có một họ nghiệm: $\boxed{x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi}$ $\quad (k \in Z)$

Bài 68

Cho $\quad f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 3}{(m-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m}$

Tìm giá trị của m để f(x) < 0 với mọi giá trị của x

Đ.H. Kiến trúc Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $\quad f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 3}{(m-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m}$

Xét tử số $-x^2 + 3x - 3$ có $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ nên tử số $-x^2 + 3x - 3 < 0$ ới mọi x $\Rightarrow f(x) < 0 \ \forall x \Leftrightarrow$

$$(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m > 0 \ \forall x$$

$$\Leftrightarrow (m-1).\,2^{\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m > 0 \ \forall x \qquad (1)$$

Đặt $\quad t = 2^{\cos^2 x}$ thì $2^{\sin^2 x} = 2^{1-\cos^2 x} = \dfrac{2}{2^{\cos^2 x}} = \dfrac{2}{t}$

Do đó từ (1) ta được bất phương trình:

$$\Leftrightarrow (m-1)t + \frac{4}{t} + 2m > 0 \quad \forall t \in [1, 2]$$

$$\Leftrightarrow m(t+2) > t - \frac{4}{t} \qquad \forall t \in [1, 2]$$

$$\Leftrightarrow \qquad m > \frac{t^2-4}{t(t+2)} = f(t) \qquad \forall t \in [1, 2]$$

Ta phải tìm m để $m > f(t) \quad \forall t \in (1, 2)$

Xét $f'(t) = \dfrac{2t^2+8t+8}{t^2(t+2)^2} = \dfrac{2(t+2)^2}{t^2(t+2)^2} > 0 \quad \forall t \in [1, 2]$

Suy ra f(t) đồng biến trong đoạn $1 \le t \le 2$, giá trị lớn nhất của f(t) $= f(2) = \dfrac{2^2-4}{2(2+2)} = 0$, do đó $m > f(t)\ \forall t \in [1, 2]$ hay m>0

Vậy $f(x) < 0$ với mọi giá trị của x khi $m > 0$

Bài 69

> **Tìm các nghiệm của phương trình:** $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$
>
> **thoả mãn điều kiện $0 < x < 2\pi$**
>
> **Đ.H. Kinh tế Quốc dân (1995**

GIẢI

Ta có: $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$ với $0 < x < 2\pi$

Điều kiện: $\cos 2x \ne 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \ne 2k\pi$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\frac{2\cos 2x \sin x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\cos 2x \sin x}{|\sin x|} = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

a/ Với $0 < x < \pi$ thì $\sin x > 0$ nên $|\sin x| = \sin x$

Phương trình (1) tương đương:

$$\cos 2x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

Với $0 < x < \pi$ phương trình có hai nghiệm:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{16} \quad \text{và} \quad x = \frac{9\pi}{16}} \quad k = 0 \text{ và } k = 1$$

b/ Với $\pi < x < 2\pi$ thì $\sin x < 0$ nên $|\sin x| = -\sin x$

Phương trình (1) tương đương:

$$\cos 2x = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

ở trong khoảng $(\pi, 2\pi)$ phương trình có hai nghiệm:

$$\boxed{x = \frac{21\pi}{16} \quad \text{và} \quad x = \frac{29\pi}{16}} \quad (k = 2 \text{ và } k = 3)$$

Bài 70

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} \text{ trong khoảng } (-\pi, \pi)$$

Đ.H. Kinh tế Quốc dân(1995)

GIẢI

Ta có: $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4} \quad (-\pi < x < \pi)$ (1)

Hàm số (1) có thể viết thành:

$$2y\cos x - y\sin x + 4y = \cos x + 2\sin x + 3$$

$$(2y - 1)\cos x - (y + 2)\sin x = 3 - 4y$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$(VT)^2 \leq \left[(2y - 1)^2 + (y + 2)^2\right](\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\leq (2y - 1)^2 + (y + 2)^2$$

$$\leq 5y^2 + 5$$

Suy ra $(3 - 4y)^2 \leq 5y^2 + 5 \Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0$ (2)

Giải (2) ta được: $\dfrac{2}{11} \leq y \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của y trong $(-\pi, \pi)$ là 2

và giá trị nhỏ nhất của y là $\dfrac{2}{11}$

Cách 2. Đặt $tg\dfrac{x}{2} = t$ khi $x \in (-\pi, \pi)$ thì $t \in (-\infty, +\infty)$

Hàm số y trở thành $y = \dfrac{t^2 + 2t + 2}{t^2 - t + 3}$ hay

$$y(t^2 - t + 3) = t^2 + 2t + 2$$

$\Leftrightarrow \quad (y - 1)t^2 - (y + 2)t + 3y - 2 = 0$ (3)

a/ $y = 1$ khi $t = \dfrac{1}{3}$

b/ $y \neq 1$, phương trình (3) luôn có nghiệm t nên:

$$\Delta = (y+2)^2 - 4(y-1)(3y-2) \geq 0 \Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2$$

Cách 3. Ta có: $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ $\quad (x \in (-\pi, \pi))$

$\Leftrightarrow \quad 2y\cos x - y\sin x + 4y = \cos x + 2\sin x + 3$

$\Leftrightarrow \quad (2y-1)\cos x - (y+2)\sin x = 3 - 4y$ (1)

Biết $(2y-1)^2 + (y+2)^2 = 5y^2 + 5$

Suy ra $\left(\dfrac{2y-1}{\sqrt{5y^2+5}}\right)^2 + \left(\dfrac{y+2}{\sqrt{5y^2+5}}\right)^2 = 1$, nên đặt:

$\cos\alpha = \dfrac{2y-1}{\sqrt{5y^2+5}}$ thì $\sin\alpha = \dfrac{y+2}{\sqrt{5y^2+5}}$, do đó (1) trở thành

$$\cos\alpha\cos x - \sin\alpha\sin x = \frac{3-4y}{\sqrt{5y^2+5}}$$

$$\cos(x+\alpha) = \frac{3-4y}{\sqrt{5y^2+5}} \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi:

$$\frac{|3-4y|}{\sqrt{5y^2+5}} \leq 1$$

$\Leftrightarrow \quad 11y^2 - 24y + 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2}{11} \leq y \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của y trong $(-\pi, \pi)$ là 2 và giá trị nhỏ nhất của y trong $(-\pi, \pi)$ là $\dfrac{2}{11}$.

Bài 71

Giải phương trình: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$

Học viện Kỹ thuật quân sự (1995)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1+\sin 2x} = 2\sqrt{\sin x + \cos x}$ (1)

Điều kiện: $\cos 2x \geq 0$; $\sin x + \cos x \geq 0$

Phương trình(1) tương đương:

$$\sqrt{\cos x+\sin x}\left(\sqrt{\cos x+\sin x}+\sqrt{\cos x-\sin x}-2\right)=0$$

a/ Với $\sqrt{\cos x+\sin x}=0$ suy ra $\boxed{x=-\frac{\pi}{4}+k\pi}$ $(k\in Z)$

b/ $\sqrt{\cos x+\sin x}+\sqrt{\cos x-\sin x}=2$ (2)

Với $\cos x-\sin x\geq 0$, bình phương hai vế của (2) ta được:

$$\cos x+\sqrt{\cos 2x}=2$$

Vì $\cos x\leq 1$ và $\cos 2x\leq 1$ nên từ phương trình trên suy ra:

$$\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\Leftrightarrow \boxed{x=2k\pi}\quad (k\in Z)$$

Bài 72

Chứng minh trong tam giác ABC để có A = 2B điều kiện cần và đủ là $a^2=b^2+bc$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1995)

GIẢI

Ta có: $a^2=b^2+bc$ (1)

Từ định lý hàm số sin suy ra $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$ và $c=2R\sin C$; từ (1) ta có hệ thức tương đương với:

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\sin C$$

$$\sin^2 A-\sin^2 B=\sin B\sin C \qquad (2)$$

Vế trái $\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}=\frac{\cos 2B-\cos 2A}{2}$

$=\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin C\sin(A-B)$

Từ (2) ta suy ra: $\sin C.\sin(A-B)=\sin B.\sin C$

Vì $\sin C>0$ nên $\sin(A-B)=\sin B$ (3)

Với $A=2B$ thì $\sin(A-B)=\sin(2B-B)=\sin B$ suy ra (3)

Như vậy thì từ (3) ta có:

$A-B=B+2k\pi$ hay $A=2B+2k\pi$, với k nguyên, chỉ có $k=0$ là thích hợp, vậy $A=2B$.

Hoặc $A-B=(\pi-B)+2k\pi$ suy ra $A=\pi+2k\pi$ (loại)

Vậy để có $A=2B$ thì điều kiện cần và đủ là $a^2=b^2+bc$

Bài 73

Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=m$$

Đ.H. Luật. TP.HCM. (1995)

GIẢI

Ta có: $m = f(x) = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x}$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \geq \dfrac{-1}{2} \\ \sin x \geq \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

$f(x) \geq 0$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất khi và chỉ khi $(f(x))^2$ đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.

$$(f(x))^2 = 2 + 2(\cos x + \sin x) + 2\sqrt{1 + 2(\cos x + \sin x) + 4\sin x\cos x}$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$

Với điều kiện: $\dfrac{-\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$

Suy ra: $\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \leq x + \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

Ta có: $(f(x))^2 = 2 + 2t + 2\sqrt{1 + 2t + 2(t^2-1)}$

$$= 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1} = g(t)$$

Đạo hàm $g'(t) = 2 + \dfrac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}} > 0 \quad \forall t \in \left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \sqrt{2}\right]$

nên $(f(x))^2_{max} = g(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2(2-1)}$

$$= 2 + 2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2}+1) = 4(\sqrt{2}+1)$$

và $(f(x))^2_{min} = g\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 2 + (\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{\dfrac{2(\sqrt{3}-1)^2}{4} + \dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{2} - 1}$

$$= 1 + \sqrt{3}$$

Vậy $f(x) = m$ có giá trị lớn nhất là $2\sqrt{\sqrt{2}+1}$ và $f(x) = m$ có giá trị nhỏ nhất là: $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ ⇒ để phương trình có nghiệm thì:

$$\boxed{\sqrt{1+\sqrt{3}} \leq m \leq 2\sqrt{\sqrt{2}+1}}$$

Bài 74

a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác với chu vi 2p. Chứng minh rằng:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8}$$

Đ.H. Luật TP. HCM. (1995)

GIẢI

Ta cần chứng minh: $(p-a)(p-b)(p-c) \le \dfrac{abc}{8}$

Biết $p-a = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-a}{2} > 0$

$p-b = \dfrac{a+b+c}{2} - b = \dfrac{a+c-b}{2} > 0$

$p-c = \dfrac{a+b+c}{2} - c = \dfrac{a+b-c}{2} > 0$

áp dụng bất đẳng thức Côsi với ba số dương (p–a), (p–b) và (p–c),

a có $(p-a)(p-b) \le \left[\dfrac{(p-a)+(p-b)}{2}\right]^2 = \dfrac{c^2}{4}$ (1)

$(p-b)(p-c) \le \left[\dfrac{(p-b)+(p-c)}{2}\right]^2 = \dfrac{a^2}{4}$ (2)

$(p-c)(p-a) \le \left[\dfrac{(p-c)+(p-a)}{2}\right]^2 = \dfrac{b^2}{4}$ (3)

Nhân vế với vế (1), (2) và (3) ta có:

$$(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \le \frac{c^2a^2b^2}{64}$$

Hạ bậc hai vế suy ra:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8} \quad \text{(đpcm)}$$

Chú ý:

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi)

$\dfrac{b+c-a}{2} > 0$ (tổng hai cạnh tam giác lớn hơn cạnh thứ ba)

Bài 75

1. Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

2. Tam giác ABC có diện tích bằng 1 và ba cạnh a, b, c thoả mãn $36 = \sqrt{3}\,(a + b + c)^2$. Hãy xác định dạng của tam giác đó.

ĐH. Luật TP. HCM. (1995)

GIẢI

1. Ta có: $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+\cos 2x)^2 + (1+\sin 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 + 2(\cos 2x + \sin 2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

Các nghiệm số là: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ và $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Hệ thức đã cho: $36 = \sqrt{3}\,(a + b + c)^2$

áp dụng đẳng thức Cô si với ba số dương $(p - a)$; $(p - b)$; $(p - c)$;

ta có: $(p - a)(p - b)(p - c) \le \left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3 = \frac{p^3}{27}$

$$\Leftrightarrow \quad p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \quad S \le \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2}{3\sqrt{3}}$$

$$1 \le \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{36}.\sqrt{3}$$

Suy ra: $36 \le \sqrt{3}\,(a + b + c)^2$

Dấu "=" xảy ra khi $(p - a) = (p - b) = (p - c) \Leftrightarrow a = b = c$ là tam giác đều.

Bài 76

Giải phương trình: $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$

Đ.H. Mỏ - Địa chất (1995)

GIẢI

Ta có: $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$

$$\Leftrightarrow \quad (3\sin 3x - 4\sin^3 3x) - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 9x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 9x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{2k\pi}{9} \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 77

Chứng minh rằng tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0 khi và chỉ khi: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$

Đ.H. Nông lâm TP. HCM. (1995)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$

Suy ra phương trình tương đương:

$$(\sin A - \sqrt{3}\cos A) + (\sin B - \sqrt{3}\cos B) + (\sin C - \sqrt{3}\cos C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right) + \left(\frac{1}{2}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) + \left(\frac{1}{2}\sin C - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - 60^0) + \sin(B - 60^0) + \sin(C - 60^0) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)\cos\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)=0 \qquad (1)$$

Biết $\quad \frac{A+B}{2}-60^\circ=\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)-60^\circ=30^\circ-\frac{C}{2}$

Nên $\quad \sin\left(\frac{A+B}{2}-60^\circ\right)=\sin\left(30^\circ-\frac{C}{2}\right)=-\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)$

Do đó (1) có thể viết:

$$-2\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)\cos\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)\left[\cos\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)-\cos\frac{A-B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)\left[\cos\left(60^\circ-\frac{A+B}{2}\right)-\cos\frac{A-B}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)\left[-2\sin\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{B}{2}\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(\frac{A}{2}-30^\circ\right).\sin\left(\frac{B}{2}-30^\circ\right).\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)=0 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra: $\sin\left(\frac{A}{2}-30^\circ\right)$; $\sin\left(\frac{B}{2}-30^\circ\right)$ hay $\sin\left(\frac{C}{2}-30^\circ\right)=0$

Giả sử $\quad \sin\left(\frac{A}{2}-30^\circ\right)=0$

Biết $\quad 0^\circ<\frac{A}{2}<90^\circ \quad \Rightarrow -30^\circ<\frac{A}{2}-30^\circ<60^\circ$

Nên $\quad \sin\left(\frac{A}{2}-30^\circ\right)=0 \quad \Leftrightarrow \frac{A}{2}-30^\circ=0^\circ$

$$\Leftrightarrow A=60^\circ$$

Bài 78

Gọi R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh: $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội (1995)

GIẢI

Trong tam giác ta có: $S=pr=\frac{1}{2}bc\sin A$ suy ra:

$$r = \frac{bc\sin A}{a+b+c} = \frac{2R\sin B.(2R\sin C)\sin A}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{8R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Bài 79

Giải phương trình: $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$

Đ.H. Ngoại thương Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$ (1)

Biết $1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$

Nên $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$

Do đó phương trình (1) tương đương

$$4\cos x - 2\cos 2x = 1 + \cos 4x$$

Hay $4\cos x = 2\cos 2x + 2\cos^2 2x$

$= 2\cos 2x(1 + \cos 2x)$

$= 2\cos 2x.\ 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x(1 - \cos 2x\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0\\ 1 - \cos 2x\cos x = 0\end{cases}$$

- Với $\cos x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $1 - \cos 2x\cos x = 0$

$\cos 2x\cos x = 1$

Do $|\cos 2x| \le 1$; $|\cos x| \le 1$ nên ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos x = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\cos 2x = -1\\ \cos x = -1\end{cases} \quad (2)$$

- $\begin{cases}\cos 2x = 1\\ \cos x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 - 2\sin^2 x = 1\\ \cos x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = 0\\ \cos x = 1\end{cases} \Rightarrow x = k2\pi \quad (k \in Z)$

- $\begin{cases}\cos 2x = -1\\ \cos x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2\sin^2 x = -1\\ \cos x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin^2 x = -2\\ \cos x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x = 1\\ \cos x = -1\end{cases} (k \in Z)$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm

Bài 80

Các góc tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} = \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Đ.H. Ngoại thương Hà Nội (1995)

GIẢI

Hệ thức đã cho:

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} = \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

Do $\frac{A}{2} < 90^0$; $\frac{B}{2} < 90^0$ và $\frac{C}{2} < 90^0$ nên biểu thức dưới căn ở vế phải có giá trị dương.

áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$\left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)^2 \le 2(\sin A + \sin B)$$

$$= 2.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 4\cos\frac{C}{2}$$

(Vì $\cos\frac{A-B}{2} \le 1$ và $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$)

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\sin A = \sin B\\ \cos\frac{A-B}{2} = 1\end{cases} \Leftrightarrow A = B$

Vậy: $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \le 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$ (1)

$\sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \le 2\sqrt{\cos\frac{A}{2}}$ (2)

$\sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin A} \le 2\sqrt{\cos\frac{B}{2}}$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$2\left(\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\right)\le 2\left(\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\le\sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

"Đẳng thức" xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$ hay ΔABC là tam giác đều.

Bài 81

Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$

Đ.H. Ngoại thương (1995)

GIẢI

Ta có: $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$ (1)

Biến đổi vế trái của (1):

$$\begin{aligned}\sin^8 x + \cos^8 x &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x\cos^4 x\\ &= \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x\\ &= 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^4 2x - \frac{1}{8}\sin^4 2x\\ &= 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x\end{aligned}$$

Do đó phương trình (1) tương đương:

$$\begin{aligned}1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x &= \frac{17}{16}\cos^2 2x\\ &= \frac{17}{16}(1-\sin^2 2x)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin^4 2x + \sin^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{ll}\sin^2 2x = -1 & \text{(loại)}\\ \sin^2 2x = \frac{1}{2} & \end{array}\right.$$

- Với $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\quad 1 - \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}} \quad (k \in Z)$$

Vậy phương trình có nghiệm số $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$

Bài 82

Các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\sqrt{\text{tg}A} + \sqrt{\text{tg}B} + \sqrt{\text{tg}C} = \sqrt{\text{cot g}\frac{A}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{B}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{C}{2}}$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Đ.H. Ngoại thương TP.HCM. (1995)

GIẢI

Ta có:

$$\sqrt{\text{tg}A} + \sqrt{\text{tg}B} + \sqrt{\text{tg}C} = \sqrt{\text{cot g}\frac{A}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{B}{2}} + \sqrt{\text{cot g}\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

Để (1) có nghĩa thì các góc A, B, C của tam giác ABC phải là góc nhọn. Không mất tính tổng quát nếu ta giả sử rằng:

$$A \le B \le C \;\Rightarrow\; \begin{cases} A \le \frac{\pi}{3} \\ C \ge \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Do hàm số tgx đồng biến trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên:

$$\sqrt{\text{tg}A} + \sqrt{\text{tg}B} + \sqrt{\text{tg}C} \le 3\sqrt{\text{tg}C} = 3\sqrt{\text{tg}\frac{\pi}{3}} = 3\sqrt[4]{3} \qquad (2)$$

Và hàm số cotgx nghịch biến trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\sqrt{\text{cotg}\frac{A}{2}} + \sqrt{\text{cotg}\frac{B}{2}} + \sqrt{\text{cotg}\frac{C}{2}} \ge 3\text{cotg}\sqrt{\frac{C}{2}} = 3\sqrt{\text{cotg}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt[4]{3} \qquad (3)$$

ở (2) dấu "đẳng thức" xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

ở (3) dấu "đẳng thức" xảy ra khi $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \quad A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Vậy nếu tam giác ABC đều thì hệ thức (1) được thoả mãn.

Cách khác. Biểu thức dưới căn cho ta tgA, tgB, tgC > 0 và A, B, C là các góc nhọn nên cosC > 0

Ta có: $$\frac{1+\cos C}{1-\cos C} \le \frac{\cos(A-B)+\cos C}{\cos(A-B)-\cos C} = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{\cos(A-B)+\cos(A+B)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}} \le \frac{-2\sin A\sin(-B)}{2\cos A\cos(-B)}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}^2\frac{C}{2} \le \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B} = \operatorname{tgA}\operatorname{tgB}$$

suy ra: $$\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} \le \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgB}} \qquad (4)$$

Tương tự ta có : $\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} \le \sqrt[4]{\operatorname{tgB}\operatorname{tgC}}$ (5) và $\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} \le \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgC}}$ (6)

Cộng (4), (5) và (6) vế với vế (đều dương) ta được:

$$\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} + \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} \le \sqrt[4]{\operatorname{tgB}\operatorname{tgC}} + \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgC}} + \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgB}} \qquad (7)$$

Nhưng theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{\operatorname{tgB}\operatorname{tgC}} \le \dfrac{\sqrt{\operatorname{tgB}} + \sqrt{\operatorname{tgC}}}{2} \\ \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgC}} \le \dfrac{\sqrt{\operatorname{tgA}} + \sqrt{\operatorname{tgC}}}{2} \\ \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgB}} \le \dfrac{\sqrt{\operatorname{tgA}} + \sqrt{\operatorname{tgB}}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{\operatorname{tgB}\operatorname{tgC}} + \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgC}} + \sqrt[4]{\operatorname{tgA}\operatorname{tgB}} \le \sqrt{\operatorname{tgA}} + \sqrt{\operatorname{tgB}} + \sqrt{\operatorname{tgC}} \qquad (8)$$

Từ (8) và (7) ta suy ra:

$$\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}} + \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} \le \sqrt{\operatorname{tgA}} + \sqrt{\operatorname{tgB}} + \sqrt{\operatorname{tgC}}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C ⇔ ABC là tam giác đều.

Bài 83

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không phải là tam giác tù,

thì: (1 + cosA)(1 + cosB)(1 + cosC) > 2.

Học viện Quan hệ quốc tế (1995)

GIẢI

Ta có vế trái:

(1 + cosA)(1 + cosB)(1 + cosC) = 1 + (cosA + cosB + cosC) +

+ cosAcosB + cosBcosC + cosCcosA + (cosAcosBcosC)

Vì ABC không phải là tam giác tù nên cosA, cosB, cosC > 0

Nên cosAcosB + cosBcosC + cosC cosA + cosAcosBcosC > 0

$$\text{Biết } \cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 > 1$$

(vì $\sin\frac{A}{2}$; $\sin\frac{B}{2}$; $\sin\frac{C}{2}$ đều có giá trị dương).

Do đó:

(1 + cosA)(1 + cosB)(1 + cosC) > 1 + (cosA + cosB + cosC)

$$> 1 + \left(1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$> 2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 84

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > 2$$

Học viện Quan hệ quốc tế (1995)

GIẢI

Ta có: $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > 2$

Do $\frac{A}{2}$; $\frac{B}{2}$; $\frac{C}{2}$ là các góc nhọn nên

$$0 < \cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} < 1$$

Suy ra: $\cos\frac{A}{2} > \cos^2\frac{A}{2}$

$\cos\frac{B}{2} > \cos^2\frac{B}{2}$

$$\cos\frac{C}{2} > \cos^2\frac{C}{2}$$

Cộng vế với vế, ta được:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$> \frac{1+\cos A}{2} + \frac{1+\cos B}{2} + \frac{1+\cos C}{2}$$

$$> \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \qquad (1)$$

Theo bài trên, ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$

Nên từ (1) ta suy ra: $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ (đpcm)

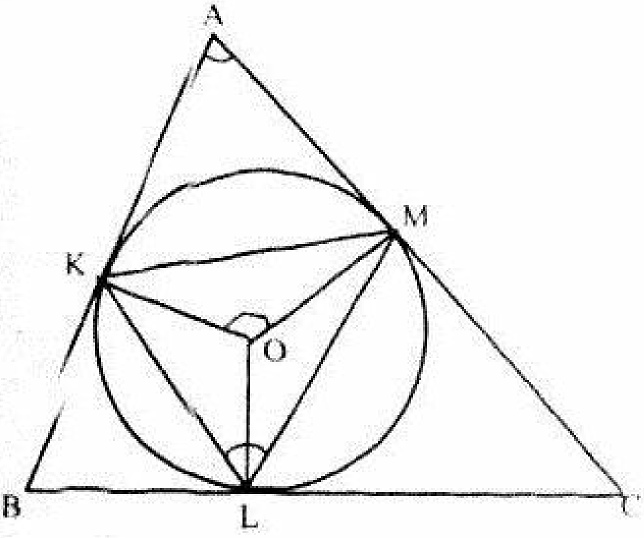
Bài 85

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA, lần lượt tại K, L, M. Gọi S là diện tích tam giác ABC, s là diện tích tam giác KLM. Chứng minh rằng:

$$s = 2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Học viện Quan hệ quốc tế (1995)

GIẢI



Ta có: OK = OM = OL = r = bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, nhưng với KLM thì r lại là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\widehat{KOM} = \pi - A$

$$\widehat{KLM} = \frac{1}{2}\widehat{KOM} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

nên

$$\sin\widehat{KLM} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

Trong tam giác KLM theo định lý hàm số sin, ta có:

$$\frac{KM}{\sin\widehat{KLM}} = 2r \text{ hay } KM = 2r\sin KLM = 2r\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= (b + c - a)\sin\frac{A}{2}$$

Do đó $$\frac{KM}{BC} = \frac{(b + c - a)\sin\frac{A}{2}}{a}$$

$$= \frac{(\sin B + \sin C - \sin A)}{\sin A}\sin\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$$

$$\frac{KM}{BC} = \cos\frac{B - C}{2} - \cos\frac{B + C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Tương tự: $\frac{ML}{BA} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$ (2)

Nhân (1) và (2) ta có: $\frac{KMML}{BC.BA} = 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$ (3)

Biết $s = \frac{1}{2}KM.ML\sin\widehat{KML} = \frac{1}{2}KM.ML\cos\frac{B}{2}$

suy ra: $KM.ML = \frac{2s}{\cos\frac{B}{2}}$ (4)

$S = \frac{1}{2}BC.BA\sin B$ suy ra: $BC.BA = \frac{2S}{\sin B}$ (5)

Thế (4) và (5) vào vế trái của (3) và rút gọn ta được:

$$s = 2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 86

Giải phương trình: $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$

Đ.H. Nông lâm TP.HCM. (1995)

GIẢI

Ta có: $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$ (1)

áp dụng công thức $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

Ta có: $3\sin 3x - 4\sin^3 3x = \sin 9x$

Do đó phương trình (1) viết thành:

$$3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 9x - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 9x\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos 9x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 9x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 9x = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9} & (k \in Z) \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{2k\pi}{9} & (k \in Z) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có họ nghiệm là:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9}} \ (k \in Z) \quad \text{và} \quad \boxed{x = \frac{7\pi}{54} + \frac{2k\pi}{9}} \ (k \in Z)$$

Bài 87

Chứng minh rằng tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0 khi và chỉ khi: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$

Đ.H. Nông lâm TP. HCM. (1995)

GIẢI

Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 > 0$$

Do đó phương trình đã cho tương đương:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sqrt{3}\,(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - \sqrt{3}\cos A) + (\sin B - \sqrt{3}\cos B) + (\sin C - \sqrt{3}\cos C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin A - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos A\right) + \left(\sin B - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos B\right) + \left(\sin C - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos C\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A + B - \frac{2\pi}{3}}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin\left[\pi - A - B - \frac{\pi}{3}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin\left[\frac{2\pi}{3} - (A+B)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{A-B}{2} - \sin\left[(A+B) - \frac{2\pi}{3}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\left(\frac{A+B}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\left[-2\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{-B}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -4\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \qquad (1)$$

Vậy ít nhất một thừa số của (1) bằng 0.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \text{Nếu } \sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ thì } \frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} = k\pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{3}$$

Vậy tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0.

Bai 88

Giải phương trình lượng giác: $\sin^2x + \sin^2y + \sin^2(x+y) = \dfrac{9}{4}$

Đ.H. Nông nghiệp I (1995)

GIẢI

Ta có: $\sin^2x + \sin^2y + \sin^2(x+y) = \dfrac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2y}{2} + 1 - \cos^2(x+y) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \left(\frac{\cos 2x + \cos 2y}{2}\right) - \cos^2(x-y) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - [\cos(x+y)\cos(x-y)] - \cos^2(x+y) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2(x+y) + \cos(x+y)\cos(x-y) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 - \frac{1}{4}\cos^2(x-y) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin(x-y) = 0 \\ \cos(x+y) + \dfrac{1}{2}\cos(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = k\pi \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}\cos k\pi \end{cases} \quad (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = k\pi \\ \cos(x+y) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + k\pi\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = k\pi \\ x + y = \pm\left(\dfrac{2\pi}{3} + k\pi\right) + 2m\pi \quad (m \in Z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k\pi \\ \cos(x + y) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = k\pi \\ x + y = \pm\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right) + 2m\pi \end{cases} \quad (m \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boxed{\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi + m\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + m\pi \end{cases}} \\ \boxed{\begin{cases} x = \frac{-\pi}{3} + m\pi \\ y = \frac{-\pi}{3} - l\pi + m\pi \end{cases}} \end{array}\right. \quad (k, m \in Z)$$

Bài 89

Giải phương trình: $\sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x} = \sin x + \sqrt{3}\cos x$

Đ.H. Nông nghiệp I (1995)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x} = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ (1)

Biểu thức trong căn $2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ có thể biến đổi:

$$2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2 + \cos 2x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin 2x$$

$$= 2 + 2\left(\cos 2x \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)$$

$$= 2 + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0 \quad \forall x$$

Để x là nghiệm của (1), ta phải có: $\sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$

Hai vế của (1) đều dương, bình phương hai vế, ta được:

$$2 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x$$

$$= 1 - \cos^2x + 3\cos^2x + \sqrt{3}\sin 2x$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2x \qquad (2)$$

(2) thoả mãn với mọi x

Ta cần tìm điều kiện vế phải ≥ 0

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$$

$$\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x \geq 0$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x \geq 0$$

$$2k\pi \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Bài 90

Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện $2A + 3B = \pi$ thì các cạnh tương ứng của nó thoả mãn $a + b \leq \frac{5}{4}c$

Học viện Quân y (1995)

GIẢI

Ta có: $2A + 3B = \pi$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2}$$

$$\Leftrightarrow C = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2}\right) - B = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$$

Do đó $\sin A = \cos\frac{3B}{2} = \cos\frac{B}{2}\left(4\cos^2\frac{B}{2} - 3\right)$

$$\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}$$

$$\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Theo định lý hàm số sin ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

hay $$\frac{a}{\cos\frac{B}{2}\left(4\cos^2\frac{B}{2}-3\right)}=\frac{b}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{4\cos^2\frac{B}{2}-3}=\frac{b}{2\sin\frac{B}{2}}=c \qquad (1) \quad \left(\text{vì } \cos\frac{B}{2}>0\right)$$

Từ (1) theo tính chất của tỷ lệ thức, ta có:

$$\frac{a+b}{4\cos^2\frac{B}{2}-3+2\sin\frac{B}{2}}=c$$

$$a+b=c\left(4\cos^2\frac{B}{2}-3+2\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=c\left[4\left(1-\sin^2\frac{B}{2}\right)-3+2\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$=c\left(-4\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}+1\right) \qquad (1)$$

Đặt $\sin\frac{B}{2}=x$ thì $-4\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}+1=-4x^2+2x+1=f(x)$.

$f(x)=-4x^2+2x+1$ có giá trị lớn nhất $\frac{5}{4}$ (khi $x=\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{4}$).

Do đó từ (1) ta có: $a+b\le\frac{5}{4}c$ (đpcm)

Bài 91

Tính giới hạn: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin x\sin 4x}{x^4}$$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x-\sin x\sin 4x}{x^4}$$

Biến đổi biểu thức ($\sin^2 2x-\sin x\sin 4x$):

$$\begin{aligned}\sin^2 2x-\sin x\sin 4x &= \sin^2 2x-\sin x.2\sin 2x\cos 2x\\ &= \sin 2x(\sin 2x-2\sin x\cos 2x)\\ &= \sin 2x(2\sin x\cos x-2\sin x\cos 2x)\\ &= 2\sin 2x\sin x(\cos x-\cos 2x)\end{aligned}$$

$$= 2\sin 2x\sin x\left(-2\sin\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{-x}{2}\right)\right)$$

$$= 4\sin 2x\sin x\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

Do có: $$\frac{\sin^2 2x - \sin x\sin 4x}{x^4} = \frac{2\sin 2x\sin x.\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{3}.2x.x.\frac{3x}{2}.\frac{x}{2}}$$

$$= 6\frac{\sin 2x}{2x}.\frac{\sin x}{x}.\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

Suy ra: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x - \sin x\sin 4x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} 6\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

$$= 6\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

$$= 6.1.1.1.1 = 6$$

Chú ý: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Bài 92

Giải phương trình: $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1)$ **(1)**

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1)$

$\Leftrightarrow$ $8\sin x\cos x - 3(1 - 2\sin^2 x) = 12\sin x - 3$

$\Leftrightarrow$ $4\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 6\sin x$

$\Leftrightarrow$ $\sin x(4\cos x + 3\sin x - 6) = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4\cos x + 3\sin - 6 = 0\end{array}\right.$$

- Với $\sin x = 0$ suy ra $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $4\cos x + 3\sin x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos x + 3\sin x = 6$

Phương trình này có $4^2 + 3^2 = 25 < 6^2$ nên vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = k\pi \quad (k \in Z)$

Bài 93

Giải phương trình: $\mathbf{tgx - tg2x = sinx}$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}2x = \sin x \qquad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$

Phương trình (1) tương đương: $\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{2\cos x}{\cos 2x} - 1\right) = 0$

- Với $\sin x = 0$ suy ra $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$ (2)
- Với $\frac{1}{\cos x} - \frac{2\cos x}{\cos 2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x\cos 2x = -1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x - \cos x + 1 = 0 \qquad (3)$$

Giải (3) ta được $\cos x = -1$ suy ra $\boxed{x = \pi + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Tổng hợp nghiệm (2) và (3) là $x = k\pi \quad (k \in Z)$

Bài 94

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1. Gọi A B, C là các góc; a, b, c là các cạnh của tam giác. Biết rằng các góc A, B C lập thành cấp số nhân công bội bằng 2. Tính tổng $(a^2+b^2+c^2)$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1995)

GIẢI

Giả sử $0 < A < B < C$

Ta có các góc A, B, C lập thành cấp số nhân, công bội 2 nên:

$B = 2A$; $C = 2B = 4A$.

Biết $A + B + C = \pi \Rightarrow A = \frac{\pi}{7}$; $B = \frac{2\pi}{7}$ và $C = \frac{4\pi}{7}$

Theo định lý hàm số sin, ta có:

$$a = 2R\sin A = 2\sin\frac{\pi}{7}$$

$$b = 2R\sin B = 2\sin\frac{2\pi}{7}$$

$$c = 2R\sin C = 2\sin\frac{4\pi}{7}$$

Do đó: $a^2 + b^2 + c^2 = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7}\right)$

$$= 4\left(\frac{1-\cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1-\cos\frac{8\pi}{7}}{2}\right)$$

$$= 2\left[3 - \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}\right)\right] \qquad (1)$$

Tính tổng $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = S$

$$2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = 2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{9\pi}{7} - \sin\pi\right) = 2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$-\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} + \sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = 2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$-\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7} = 2S\sin\frac{\pi}{7}$$

$$S = -\frac{1}{2}$$

Do đó: $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 2\left[3 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 7}$

Bài 95

Giải phương trình: $\mathbf{tg^2x(1 - \sin^3x) + \cos^3x - 1 = 0}$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội

GIAI

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ta có: $tg^2x(1 - \sin^3x) + \cos^3x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(1 - \sin^3 x) = 1 - \cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2x(1 - \sin^3x) = \cos^2x(1 - \cos^3x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos^2x)(1 - \sin^3x) = (1 - \sin^2x)(1 - \cos^3x)$$

Đặt $(1 - \cos x)(1 - \sin x)$ làm thừa số chung, ta có:

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(1 - \sin x)[(1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2x) - - (1 + \sin x)(1 + \cos x + \cos^2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(1-\sin x)(\sin^2x-\cos^2x + \cos x\sin^2x-\sin x\cos^2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1- \cos x)(1- \sin x)[(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) + + \cos x\sin x(\sin x - \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(1-\sin x)((\sin x-\cos x)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x)]=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0 \\ 1 - \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 \end{array}\right.$$

- Với $\cos x = 1$ suy ra $\boxed{x = 2k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $1 - \sin x = 0$ suy ra $\sin x = 1$ hay $\cos x = 0$ (loại)
- Với $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow tgx = 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

- Với $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $(|t| \leq \sqrt{2})$

Suy ra $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, ta có phương trình:

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} t = -1 - \sqrt{2} & \text{(loại)} \\ t = -1 + \sqrt{2} & \end{array}\right.$$

Do đó: $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = 2k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi$

Bài 96

Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a; AC = b ; AB = c. Gọi m_b, m_c lần lượt là độ dài các trung tuyến BM, CN.

1) Biết $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh 2cotgA = cotgB + cotgC.

2) Biết $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c}$ và $A = 60^0$. Chứng minh ΔABC là đều.

Đ.H. Quốc gia TP.HCM. (1995)

GIẢI

Ta có: $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c}$ suy ra $\frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$ (1)

Biết $m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2}$ và $m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{2}$

Do đó (1) trở thành: $\frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2(a^2 + b^2) - c^2}$

suy ra: $c^2(2(a^2 + b^2) - c^2) = b^2(2(a^2 + c^2) - b^2)$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2 = b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A = 2\sin B \sin C \cos A$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{\sin B \sin C} = 2\frac{\cos A}{\sin A} = 2\cot gA$

Biết sinA = sin(B + C) nên:

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C}=\frac{\sin B\cos C+\sin C\cos B}{\sin B\sin C}=\cot gB+\cot gC$$

Do đó: $2\cot gA=\cot gB+\cot gC$

2) Theo câu trên ta có: $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}$ thì: $2\cot gA=\cot gB+\cot gC$

Biết $A=60^0$ nên $2\cot gA=2\cot g60^0=\cot gB+\cot gC$

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$2\sqrt{3}\sin B\sin C=3\sin 60^0=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$4\sin B\sin C=3$$

$$\Rightarrow\quad 2\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)\right]=3$$

$$\Rightarrow\quad 2\cos(B-C)-2\cos 120^0=3$$

$$\Rightarrow\quad 2\cos(B-C)=3+2\cos 120^0=3-1=2$$

Hay $\cos(B-C)=1$

$\Rightarrow\quad B-C=0$

$\Rightarrow\quad B=C$ suy ra $B=C=60^0$.

Vậy ΔABC là tam giác đều.

Bài 97

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và $A\geq B\geq C$

1/ Chứng minh rằng $tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC$

2/ Đặt $tgAtgB=p$, $tgAtgC=q$

Chứng minh rằng $(p-1)(q-1)\geq 4$

Đ.H. Tổng hợp T.P. HCM. (1995)

GIẢI

1/ Trong tam giác ta có: $A+B+C=\pi$ suy ra $A=\pi-(B+C)$

Ta có: $tgA=tg\left[\pi-(B+C)\right]=-tg(B+C)$

$$tgA=-\frac{tgB+tgC}{1-tgBtgC}=\frac{tgB+tgC}{tgBtgC-1}$$

suy ra: $tgAtgBtgC-tgA=tgB+tgC$

hay $tgA+tgB+tgC=tgAtgBtgC$

2/ Thế giá trị của p và q vào bất đẳng thức:

$$(p-1)(q-1) \ge 4$$

Ta được: $(\text{tg}A\,\text{tg}B - 1)(\text{tg}A\,\text{tg}C - 1) \ge 4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1\right)\left(\frac{\sin A \sin C}{\cos A \cos C} - 1\right) \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B}\right)\left(\frac{\sin A \sin C - \cos A \cos C}{\cos A \cos C}\right) \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-\cos(A+B)}{\cos A \cos B}\right)\left(\frac{-\cos(A+C)}{\cos A \cos C}\right) \ge 4 \qquad (1)$$

Biết $-\cos(A+B) = \cos C$ (2 góc bù nhau)

$-\cos(A+C) = \cos B$

Do đó (1) tương đương

$$\frac{1}{\cos A.\cos A} \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \le \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow A \ge \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3A \ge \pi = A + B + C$$

$$\Leftrightarrow 2A \ge B + C$$

$$\Leftrightarrow (A - B) + (A - C) \ge 0 \qquad (2)$$

(2) đúng với giả thiết $A \ge B \ge C$.

Bài 98

1/ Tìm k để bất phương trình sau vô nghiệm.

$$\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\frac{x}{2} \ge k$$

2/ Tìm nghiệm của bất phương trình $\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\frac{x}{2} \ge 1$ thoả mãn điều kiện $\log_2(x^2 - x + 2) \le 2$

Đ.H. Tổng hợp TP. HCM. (1995)

GIẢI

1/ Ta có: $\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\frac{x}{2} \ge k$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + 1 - \cos x \ge k$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x \geq \frac{k-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{k-1}{2}$$

Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{k-1}{2} \ \forall x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k-1}{2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k > 3$$

2/ Từ bất phương trình đã cho $\sqrt{3}\sin x + 2\sin^2\frac{x}{2} \geq 1$ ta suy ra:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \qquad (1)$$

Giải bất phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) \leq 2$ (2)

Điều kiện: $x^2 - x + 2 > 0$; $x^2 - x + 2 > 0 \ \forall x$ (vì $\Delta < 0$)

Từ (2) ta có: $\log_2(x^2 - x + 2) \leq \log_2 4$

Suy ra:

$$x^2 - x + 2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 2 \qquad (3)$$

Trong (1) với k = −1 thì: $\frac{\pi}{6} - 2\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} - 2\pi$

hay $-\frac{11\pi}{6} \leq x \leq -\frac{5\pi}{6}$

Kết hợp với (3) ⇒ không có giá trị x nào thoả mãn.

Với k = 0 thì $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$

Kết hợp với (3) ta lấy $\frac{\pi}{6} \leq x \leq 2$

Vậy nghiệm của bất phương trình thoả mãn

$\log_2(x^2 - x + 2) \leq 2$ là: $\boxed{\frac{\pi}{6} \leq x \leq 2}$

Bài 9.9

Các góc B, C của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$2\left(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\sqrt{3}\right)\le \cot gB+\cot gC$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Đ.H. Xây dựng Hà Nội (1995)

GIẢI

Ta có: $2\left(\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-\sqrt{3}\right)\le \cot gB+\cot gC$

$$\Leftrightarrow\quad 2\left(\frac{\sin C+\sin B-\sqrt{3}\sin B\sin C}{\sin B\sin C}\right)\le\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2(\sin B+\sin C-\sqrt{3}\sin B\sin C)\le \sin C\cos B+\sin B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin B\left[2-(\sqrt{3}\sin C+\cos C)\right]+\sin C\left[2-(\sqrt{3}\sin B+\cos B)\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin B\left[2-\left(\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\sin C+\cos C\right)\right]+\sin C\left[2-\left(\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\sin B+\cos B\right)\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin B\left[2-2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right]+\sin C\left[2-2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\right]\le 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin B\left[1-\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right]+2\sin C\left[1-\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\right]\le 0 \qquad (1)$$

Biết $\sin B>0$ và $1-\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\ge 0$

$\sin C>0$ và $1-\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\ge 0$

Từ (1) ta suy ra:

$$\begin{cases}1-\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=0\\ 1-\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\\ B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{3}$$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

ĐÊ THI NĂM 1996

Bài 100

Giải phương trình: $\mathbf{tgx + tg2x - tg3x = 0}$

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội (1996)

GIẢI

Ta có: $\text{tg}x + \text{tg}2x = \dfrac{\sin(x+2x)}{\cos x\cos 2x} = \dfrac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}$

Do đó phương trình đã cho là: $\dfrac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x} - \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\\ \cos 3x \neq 0\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\end{cases}$

Đặt sin3x làm thừa số chung, ta có: $\sin 3x\left(\dfrac{1}{\cos x\cos 2x} - \dfrac{1}{\cos 3x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin 3x\left(\dfrac{\cos 3x - \cos x\cos 2x}{\cos x\cos 2x\cos 3x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin 3x\left(\dfrac{\cos(2x+x) - \cos x\cos 2x}{\cos x\cos 2x\cos 3x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin 3x(-\sin 2x\sin x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x.\text{tg}2x.\text{tg}3x = 0$

- Với $\text{tg}x = 0$ có nghiệm $x = k\pi$
- Với $\text{tg}2x = 0$ có nghiệm $x = \dfrac{k\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{k\pi}{2}$ (loại)
- Với $\text{tg}3x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = \dfrac{k\pi}{3}}$

Bài 101

Cho tam giác ABC với diện tích là S và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng: $\mathbf{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \dfrac{2S}{R^2}}$

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội

GIẢI

Hệ thức cần chứng minh: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \dfrac{2S}{R^2}$

Ta có: $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$$= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$$

$$= 2\sin C\,(\cos(A-B) + \cos C)$$

$$= 2\sin C\,(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$= 4\sin A.\sin B.\sin C \qquad (1)$$

Theo định lý hàm số sin ta suy ra:

$$\sin 2A = \frac{a}{2R}\ ;\ \sin B = \frac{b}{2R}\ \text{ và } S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

Do đó, từ (1) ta có:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4.\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\sin C = \frac{2S}{R^2}\ \text{ (đpcm)}$$

Bài 102

Giải phương trình lượng giác: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,(2 - \sin 3x)$

Đ.H. Ngoại ngữ Quân sự (1996)

GIẢI

Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,(2 - \sin 3x) \qquad (1)$

ở vế phải của phương trình thì $2 - \sin 3x \geq 1$ nên:

$$\sqrt{2}\,(2-\sin 3x) \geq \sqrt{2}$$

ở vế trái $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

Như vậy, hai vế bằng nhau thì hai vế phải bằng $\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra ở vế phải khi $\sin 3x = 1$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\quad (k \in Z)$$

Dấu "=" xảy ra ở vế trái thì $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{suy ra}\quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\quad (k \in Z)$$

Kiểm tra lại, 2 nghiệm số $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ không thoả mãn, vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 103

Giải và biện luận theo k phương trình lượng giác

$$\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = k\cos x$$

Đ.H. Kỹ thuật quân sự (1996)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x} = k\cos x \qquad (1)$

Điều kiện: $k\cos x \geq 0$

Bình phương 2 vế của (1) ta được phương trình tương đương:

$$1 + \sin x + 2\sqrt{1-\sin^2 x} + 1 - \sin x = k^2\cos^2 x$$

$$2 + 2\sqrt{\cos^2 x} = k^2\cos^2 x$$

$$2 + 2|\cos x| = k^2\cos^2 x$$

Đặt $t = |\cos x|$ với $0 \leq t \leq 1$

Ta có $f(t) = k^2t^2 - 2t - 2 = 0 \qquad (2)$

- Với $k = 0$ thì từ (2) ta có: $t = -1$ (loại)
- Với $k \neq 0$, ta được:

$$|\cos x| = \frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}, \quad |\cos x| = \frac{1-\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \text{ (loại vì <0)}$$

Ta phải có: $\frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2} \leq 1$ suy ra $\sqrt{1+2k^2} \leq k^2 - 1 \qquad (2)$

- Với $k^2 \geq 1$, bình phương 2 vế của (2) ta được $k^2 \geq 4$

Vậy, để phương trình (1) có nghiệm, ta phải có $|k| \geq 2$

Do đó: Khi $k \geq 2$ thì $\cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

Khi $k \leq -2$ thì $\cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

Khi $|k| < 2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

Bài 104

Ký hiệu a,b,c là độ dài các cạnh **của một tam giác và** $p = \frac{a+b+c}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

Học **viện Kỹ thuật Quân sự (1996)**

GIẢI

Với x, y, z > 0, ta có: $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$

nên $(x+y+z)^2 > x^2 + y^2 + z^2$

$$x + y + z > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Với ba số dương $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ ta có:

$$\sqrt{(p-a)} + \sqrt{(p-b)} + \sqrt{(p-c)} > \sqrt{\left(\sqrt{p-a}\right)^2 + \left(\sqrt{p-b}\right)^2 + \left(\sqrt{p-c}\right)^2}$$

$$> \sqrt{p-a+p-b+p-c}$$

$$> \sqrt{3p-(a+b+c)}$$

$$> \sqrt{3p-2p}$$

$$> \sqrt{p}$$

Chứng minh: $\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$\left(1\sqrt{p-a} + 1\sqrt{p-b} + 1\sqrt{p-c}\right)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(p-a+p-b+p-c)$$

$$\leq 3(3p-(a+b+c))$$

$$\leq 3p$$

Hạ bậc hai vế của bất đẳng thức này ta có:

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$$

Bài 105

Cho phương trình: $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + k) = 3 - 4\cos^2 x$

1. **Giải phương trình khi** $k = 1$
2. **Tìm k để phương trình có đúng hai nghiệm thoả mãn điều kiện:**

$0 \leq x \leq \pi$

Đ.H. Lâm nghiệp (1996)

GIẢI

1. Giải phương trình khi k = 1

Khi k = 1phương trình đã cho là:

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$$

$$= 3 - 4(1 - \sin^2 x)$$

$$= 4\sin^2 x - 1$$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin x-1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = (2\sin x-1)(2\sin x+1)$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin x - 1)[2\cos 2x + 2\sin x + 1-(2\sin x + 1)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin x - 1)(2\cos 2x) = 0$

Suy ra: $2\sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$ có nghiệm $\left\{\boxed{\begin{matrix} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{matrix}}\right.$

và $\cos 2x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$

2. Tìm k để phương trình có đúng 2 nghiệm trong $[0; \pi]$

Ta có: $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + k) = 3 - 4\cos^2 x$

Suy ra: $2\sin x - 1)(2\cos 2x + k - 1) = 0$ (1)

Giải ra, ta được sinx = 1 có 2 nghiệm $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$ trong khoảng $[0, \pi]$.

Để (1) có đúng 2 nghiệm thì phương trình $2\cos 2x + k - 1 = 0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có 2 nghiệm trùng với hai nghiệm trên nghĩa là:

$1 < \cos 2x = \frac{1-k}{2} < -1$ dẫn tới $\begin{cases} k < -1 \\ k > 3 \end{cases}$

Hoặc 2 nghiệm:

$$\begin{cases} \cos 2x = \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-k}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = \cos 2\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1-k}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

Vậy, để phương trình có đúng 2 nghiệm trong $[0, \pi]$ thì k< –1 hoặc k > 3 hoặc k = 0

Bài 106

Giải phương trình: $4\sin^3x + 3\cos^3x - 3\sin x - \sin^2x\cos x = 0$

Đ.H. Luật Hà Nội (1996)

GIẢI

Ta có: $4\sin^3x + 3\cos^3x - 3\sin x - \sin^2x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin x(\sin^2x - 1) + \sin^2x(\sin x - \cos x) + 3\cos^3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad -3\sin x\cos^2x + \sin^2x(\sin x - \cos x) + 3\cos^3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad -3\cos^2x(\sin x - \cos x) + \sin^2x(\sin x - \cos x) = 0$

$(\sin x - \cos x)(\sin^2x - 3\cos^2x) = 0$

$(\sin x - \cos x)(1 - \cos^2x - 3\cos^2x) = 0$

$(\sin x - \cos x)(1 - 4\cos^2x) = 0$

Do đó, ta suy ra:

- $\sin x - \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

- $1 - 4\cos^2x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 4\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2(1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = \frac{-1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 107

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc nhọn thì:

$(2 - \cos^2A)(2 - \cos^2B)(2 - \cos^2C) > 4$

Đ.H. Luật Hà Nội (1996)

GIẢI

Từ hệ thức đã cho: $(2 - \cos^2A)(2 - \cos^2B)(2 - \cos^2C) > 4$

Ta suy ra: $(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C) > 4$

$\Leftrightarrow 1 + \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C + \sin^2A\sin^2B + \sin^2B\sin^2C +$

$+ \sin^2A\sin^2C + \sin^2A\sin^2B\sin^2C > 4$

Tam giác ABC có 3 góc nhọn nên sinA, sinB, sinC, cosA, cosB, cosC đều > 0. Do đó:

$$\sin A\sin B > \sin A\sin B - \cos A\cos B = -\cos(A + B) = \cos C$$

Nên $\sin^2A\sin^2B > \cos^2C$

Tương tự $\sin^2B\sin^2C > \cos^2A$

$\sin^2A\sin^2C > \cos^2B$

Như vậy vế trái của hệ thức (1) là:

$(1 + \sin^2A)(1 + \sin^2B)(1 + \sin^2C)$

$> 1+\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C+\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+\sin^2A\sin^2B\sin^2C$

$= 1+(\sin^2A+\cos^2A)+(\sin^2B+\cos^2B)+(\sin^2C+\cos^2C)+\sin^2A\sin^2B\sin^2C$

$= 1 + 3 + \sin^2A\sin^2B\sin^2C > 4$ (đpcm)

Bài 108

Giải phương trình lượng giác: $\cos7x\cos5x - \sqrt{3}\sin2x = 1 - \sin7x\sin5x$

Đ.H. Mỹ thuật công nghiệp Hà Nội (1996)

GIẢI

Biến đổi phương trình: $\cos7x\cos5x - \sqrt{3}\sin2x = 1 - \sin7x\sin5x$

thành phương trình tương đương:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(7x+5x)+\cos(7x-5x)\right]-\sqrt{3}\sin2x= 1-\frac{1}{2}(\cos2x-\cos12x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos2x - \sqrt{3}\sin2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos2x - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos2x\cos\frac{\pi}{3} - \sin2x\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 2x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Các nghiệm số là: $\boxed{\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}}$

Bài 109

> **Ba góc A, B, C** của một tam giác lập **thành một cấp số cộng. Tính** các góc của tam giác ấy biết rằng: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$
>
> Đ.H. Mỹ thuật **Công nghiệp Hà Nội (1996)**

GIẢI

Ba góc tam giác lập thành một cấp số cộng nên:

$$\frac{A+C}{2} = B \text{ mà } A + B + C = \pi \text{ suy ra } 3B = \pi \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\pi}{3}$$

Do đó hệ thức: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ với $B = \frac{\pi}{3}$ là

$$\sin A + \sin\frac{\pi}{3} + \sin C = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin A + \sin C = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

Do đó, ta có: $A - C = \frac{\pi}{3}$ mà $A + C = \pi - B = \frac{2\pi}{3}$

Suy ra: $2A = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2} \text{ và } C = \pi - (A+B) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad C = \frac{\pi}{6}$$

Vậy các góc của tam giác là $B = \frac{\pi}{3}$, $A = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$

Bài 110

Giải phương trình: $\cos^3x - 4\sin^3x - 3\cos x\sin^2x + \sin x = 0$

Đ.H. Ngoại thương (1996)

GIẢI

Ta có: $\cos^3x - 4\sin^3x - 3\cos x\sin^2x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x\cos^2x - 4\sin^3x - 3\cos x\sin^2x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(1 - \sin^2x) - 4\sin^3x - 3\cos x\sin^2x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x) - 4\sin^3x - 4\cos x\sin^2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x) - 4\sin^2x(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)(1 - 4\sin^2x) = 0$

Do đó: $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ 1 - 4\sin^2 x = 0 \end{array}\right.$

- Với $\cos x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ suy ra nghiệm: $\boxed{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi}$

- Với $1 - 4\sin^2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 2(1 - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$ có nghiệm: $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi}$

Bài 111

Gọi m_a , m_b , m_c là độ dài các trung tuyến, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $m_a.m_b.m_c \le \frac{27R^3}{8}$

Đ.H. Ngoại thương (1996)

GIẢI

Giữa các cạnh a, b, c và các trung tuyến m_a, m_b, m_c phát xuất từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC, ta có:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \quad \text{hay} \quad 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \qquad (1)$$

$$a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2m_b^2 \quad \text{hay} \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \qquad (2)$$

$$a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2m_c^2 \quad \text{hay} \quad 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \qquad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, ta có:

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 3(4R^2\sin^2A + 4R^2\sin^2B + 4R^2\sin^2C)$$

$$= 3.\ 4R^2(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C)$$

$$\Leftrightarrow \quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C) \qquad (4)$$

Tính $\quad \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \frac{9}{4} \qquad (5)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-(\cos 2A + \cos 2B)}{2} - \cos^2 C \le \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2C \le \frac{1}{4}$$

Chuyển vế:

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2C - \cos C\cos(A - B) + \frac{1}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2C - \cos(A - B)\cos C + \frac{1}{4} \ge 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai với cosC, tam thức này có $\Delta = \cos^2(A - B) - 1 \le 0$ nên tam thức luôn luôn ≥ 0 suy ra (5) luôn đúng.

Thế giá trị của $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \frac{9}{4}$ ở (5) vào (4) ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \frac{27R^2}{4} \qquad (6)$$

Nhưng $\quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \ge 3\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2} \qquad (7)$

Từ (6) và (7) ta suy ra:

$$3\sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2} \le \frac{27R^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{m_a^2m_b^2m_c^2} \le \frac{9R^2}{4} \qquad (8)$$

Lập phương (8) ta có: $m_a^2m_b^2m_c^2 \le \frac{9^3R^6}{4^3} = \frac{3^6R^6}{2^6}$

Hạ bậc $m_am_bm_c \le \frac{27R^3}{8}$ (đpcm)

Bài 112

Giải các phương trình lượng giác:

1/ $\sin 4x = \mathrm{tg}x$

2/ $\sin^4x - \cos^4x = |\sin x| + |\cos x|$

Đ.H. Nông nghiệp I (1996)

GIẢI

1. $$\sin 4x = \mathrm{tg}x \qquad (1)$$

Điều kiện $\cos x \ne 0$ hay $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ta có: $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$
$= 4\sin x\cos x\cos 2x$

Do đó, từ (1) ta có:

$$4\sin x\cos x\cos 2x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Hay $4\sin x\cos^2x\cos 2x - \sin x = 0$
$\sin x(4\cos^2x\cos 2x - 1) = 0$

- Với $\sin x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$
- Với $4\cos^2x\cos 2x = 1$

$4\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\cos 2x = 1$, suy ra $2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0$

Giải phương trình này ta được: $\cos 2x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + k\pi}$$

$\boxed{x = n\pi}$ $(k, n \in Z)$

Còn nghiệm số $\cos 2x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < -1$ (loại)

2. Giải $\sin^4x - \cos^4x = |\sin x| + |\cos x|$

$$(\sin^2x + \cos^2x)(\sin^2x - \cos^2x) = |\sin x| + |\cos x| \qquad (2)$$

$$(1).(-\cos2x) = |\sin x| + |\cos x|$$

Với $|\sin x| + |\cos x| > 0$ thì $\cos2x < 0$

Bình phương 2 vế của (2) rồi giải ta được $\boxed{x = (2n-1)\frac{\pi}{2}}$ $(n\in Z)$

Bài 113

Giải phương trình: $\sin^4x + (1 - \sin x)^4 = 17$

Đ.H.D.L. Phương đông (1996)

GIẢI

Ta có: $\sin^4x + (1 - \sin x)^4 = 17 \qquad (1)$

$$\sin^4x + (\sin x - 1)^4 = 17$$

Đặt $\sin x = t + \frac{1}{2}$ thì $\sin x - 1 = t - \frac{1}{2}$

Do đó, phương trình (1) trở thành: $\left(t+\frac{1}{2}\right)^4 + \left(t-\frac{1}{2}\right)^4 = 17$

Khai triển rồi rút gọn ta được phương trình: $2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8} - 17 = 0$

Phương trình trùng phương này có: $\Delta = 9 - 8(\frac{1}{8} - 17) = 12^2$

nên nghiệm là: $t^2 = \frac{-3+12}{4} = \frac{9}{4}$ còn nghiệm $\frac{-3-12}{4} < 0$ (loại)

- Với $t = \frac{3}{2}$ thì $\sin x = t + \frac{1}{2} = 2$ (loại vì > 1)
- Với $t = -\frac{3}{2}$ thì $\sin x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$ suy ra $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k\in Z)$

Bài 114

Tam giác ABC có tính chất gì nếu:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Trong đó A, B, C là các góc của tam giác ; a , b , c là các cạnh của tam giác.

Đ.H.D.L. Phương Đông (1996)

GIẢI

Ta biến đổi vế trái:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + \cos B - \cos(A + B)$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+ \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} + 1$$

$$= -2\left(\cos^2\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} + 1$$

$$= -2\left(\cos\frac{A+B}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Vế phải:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3$$

$$= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{b+c+a}{c+a} + \frac{c+a+b}{a+b} - 3$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$(a+b) + (b+c) + (c+a) \ge 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a+b}\right)\left(\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{c+a}\right)} \qquad (2)$$

Nhân (1) và (2) vế với vế ta được:

$$\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \ge 9$$

Do đó: $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{1}{2}.9 - 3 = \frac{3}{2} \qquad (3)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2} \qquad (4)$$

(3) Dấu bằng xảy ra khi $a + b = b + c = c + a \Leftrightarrow a = b = c$

(4) Dấu bằng xảy ra khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Vậy tam giác có cosA + cosB + cosC = $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ thì tam giác đó là tam giác giác đều.

Bài 115

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số:

$$y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

H.V. Quan hệ Quốc tế (1996)

GIẢI

Ta có: $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$= 2(1 - \cos2x) + \sin2x + \cos2x$

$= 2 - 2\cos2x + \sin2x + \cos2x$

$= 2 + \sin2x - \cos2x$

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y phụ thuộc vào giá trị lớn nhất của sin2x − cos2x.

Biết $\sin2x - \cos2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Giá trị lớn nhất của $\sin2x - \cos2x = \sqrt{2}$ khi $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

suy ra: $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

Do đó giá trị lớn nhất của y là $2 + \sqrt{2}$ khi $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$

Tương tự ta suy ra giá trị nhỏ nhất của $\sin2x - \cos2x = -\sqrt{2}$

Suy ra $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{-\pi}{8} + k\pi$ và giá trị nhỏ nhất của y là $2 - \sqrt{2}$

Bài 116

Giải phương trình: $\sin\frac{5x}{2} = 5\cos^3 x \sin\frac{x}{2}$

H.V. Quan hệ quốc tế (1996)

GIẢI

Giả sử: $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

$\Rightarrow$ VT: $\sin\frac{5x}{2} = \pm 1$, VP: $5\cos^3 x.\sin\frac{x}{2} = \pm 5$

$\Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Nhân 2 vế của phương trình với $\cos\frac{x}{2}$, ta có:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 5\cos^3 x 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \sin 3x + \sin 2x = 5\cos^3 x\sin x$

Thay $\quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ vào vế trái, ta có:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x\cos x = 5\cos^3 x\sin x$$

Hay $\quad \sin x(3 - 4\sin^2 x + 2\cos x - 5\cos^3 x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x[3 - 4(1 - \cos^2 x) + 2\cos x - 5\cos^3 x] = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x(-1 + 4\cos^2 x + 2\cos x - 5\cos^3 x) = 0$

Do đó, ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi \\ \text{Do} \quad \cos\frac{x}{2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{chọn} \quad k = 2n \quad \Rightarrow x = 2n\pi \end{array}\right.$$

vậy $\boxed{x = 2n\pi}$

Với $-1 + 4\cos^2 x + 2\cos x - 5\cos^3 x = 0$

Hay $\quad 5\cos^3 x - 4\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0 \qquad (1)$

$$(\cos x - 1)(5\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$$

Ta có: $\quad \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = 2k\pi \qquad$ (trùng nghiệm trên)

Và $\quad 5\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Phương trình có nghiệm:

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\arccos\frac{\sqrt{21} - 1}{10} + 2k\pi}$$

$$\cos x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\arccos\frac{-1 - \sqrt{21}}{10} + 2k\pi}$$

Ghi chú: Phương trình (1) là phương trình bậc ba dạng:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Khi $a + b + c + d = 0$ thì phương trình có một nghiệm số bằng 1, tức là phương trình có một thừa số $(x-1)$.

Bài 117

Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\sin A.\sin B.\sin C \le \sin\left(\frac{A+3B}{4}\right)\sin\left(\frac{B+3C}{4}\right)\sin\left(\frac{C+3A}{4}\right)$$

H.V. Quan hệ Quốc tế (1996)

GIẢI

Trong mọi tam giác ta đều có: $0 < A, B, C < \pi$

Do đó: $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 2\sin\frac{A+B}{2}$

Hay $\quad \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) \le \sin\frac{A+B}{2} \qquad (1)$

Dấu "=" xảy ra khi $\cos\frac{A-B}{2} = 1$ suy ra $A = B$

Từ (1) ta suy ra:

$$\frac{1}{4}(\sin A + \sin B) \le \frac{1}{2}\sin\frac{A+B}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{4}(\sin B + \sin B) \le \frac{1}{2}\sin\frac{B+B}{2} \qquad (3)$$

Cộng vế với vế (2) và (3) ta có:

$$\frac{1}{4}(\sin A + 3\sin B) \le \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{2B}{2}\right) \le \sin\frac{A+3B}{4} \qquad (4)$$

Từ (4) ta suy ra:

$$\sqrt[4]{\sin A\sin^3 B} \le \sin\left(\frac{A+3B}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.\sin^3 B \le \left[\sin\frac{A+3B}{4}\right]^4 \qquad (6)$$

Tương tự: $\sin B.\sin^3 C \le \left(\sin\frac{B+3C}{4}\right)^4 \qquad (7)$

$$\sin C.\sin^3 A \le \left(\sin\frac{C+3A}{4}\right)^4 \qquad (8)$$

Nhân (6), (7) và (8) vế với vế (đều dương):

$$\sin^4 A\sin^4 B\sin^4 C \le \left(\sin\frac{A+3B}{4}\right)^4\left(\sin\frac{B+3C}{4}\right)^4\left(\sin\frac{C+3A}{4}\right)^4$$

Hạ bậc ta được:

$$\sin A.\sin B.\sin C \le \sin\left(\frac{A+3B}{4}\right)\sin\left(\frac{B+3C}{4}\right)\sin\left(\frac{C+3A}{4}\right) \qquad (\text{đpcm})$$

Bài 118

Giải bất phương trình: $\dfrac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1} > 0$

Học viện Quân Y (1996)

GIẢI

Bất phương trình đã cho có thể viết: $\dfrac{\sin x + 1 - \cos x}{\sin x - (1 - \cos x)} > 0 \qquad (1)$

Thế $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ vào (1) ta có:

$$\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2}} > 0$$

Hay: $\dfrac{\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)} > 0 \ \left(\sin\frac{x}{2} \ne 0,\ \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} \ne 0\right)$

Bất phương trình tương đương:

$$\sin^2\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) > 0$$

$$\sin^2\frac{x}{2}.\cos x > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin\frac{x}{2} \ne 0\\ \cos x > 0\end{cases}$$

Giải ra, ta được: $\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < k2\pi \\ k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$

Bài 119

Giải bất phương trình: $\sin^3x\sin3x - \cos^3x\cos3x \le \frac{1}{2}$

Học viện Quân y (1996)

GIẢI

Bất phương trình đã cho: $\sin^3x\sin3x - \cos^3x\cos3x \le \frac{1}{2}$

Tương đương: $\frac{1}{4}(3\sin x - \sin3x)\sin3x - \frac{1}{4}(3\cos x + \cos3x)\cos3x \le \frac{1}{2}$

$$\frac{-3}{4}(\cos3x\cos x - \sin3x\sin x) \le \frac{3}{4}$$

$$\frac{-3}{4}\cos4x < \frac{3}{4} \quad \text{hay} \quad \cos4x \ge -1$$

Do đó, bất phương trình đúng $\forall x$.

Bài 120

Giải phương trình: $\cos^2x + \cos^2y + \cos^2(x - y) = \frac{3}{4}$

Học viện Quân y (1996)

GIẢI

Áp dụng công thức hạ bậc: $\cos^2x = \frac{1 + \cos2x}{2}$

Ta có: $\cos^2x + \cos^2y + \cos^2(x - y) = \frac{3}{4}$

$$\frac{1 + \cos2x}{2} + \frac{1 + \cos2y}{2} + \cos^2(x - y) - \frac{3}{4} = 0$$

$$1 + \cos(x + y)\cos(x - y) + \cos^2(x - y) - \frac{3}{4} = 0$$

$$\cos^2(x - y) + \cos(x + y)\cos(x - y) + \frac{1}{4} = 0 \qquad (1)$$

Phân tích: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cos^2(x + y) + \frac{1}{4}\sin^2(x + y)$

Do đó (1) thành:

$$\cos^2(x-y) + \cos(x+y)\cos(x-y) + \frac{1}{4}\cos^2(x+y) + \frac{1}{4}\sin^2(x+y) = 0$$

$$\left[\cos(x-y)+\frac{1}{2}\cos(x+y)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(x+y)=0$$

Ta suy ra: $\sin(x+y)=0 \Rightarrow \quad x+y=k\pi$

$$\text{và } \cos(x-y)+\frac{1}{2}\cos(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(x-y)=-\frac{1}{2}\cos(x+y)$$

$$=-\frac{1}{2}\cos(k\pi)$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)$$

$$x-y = \pm\left(\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)+2m\pi$$

Suy ra: $\boxed{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\pi+m\pi \\ y=-\frac{\pi}{3}-m\pi \end{array}}$ và $\boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+m\pi \\ y=\frac{\pi}{3}+k\pi-m\pi \end{array}}$ $(k\in Z)$

Bài 121

Giải phương trình: $\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{\cos y+\cos 2y+\cos 3y}=\sqrt{3}$

Đ.H. Tài chính Kế toán HàNội (1996)

GIẢI

Điều kiện: $\cos y+\cos 2y+\cos 3y\neq 0$

$$2\cos 2y\left(\cos y+\frac{1}{2}\right)\neq 0$$

Suy ra: $\begin{cases} \cos 2y\neq 0 & \text{nên} \quad y\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \\ \cos y\neq\frac{-1}{2} & \text{nên} \quad y\neq\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ $(k\in Z)$

Phương trình đã cho: $\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{\cos y+\cos 2y+\cos 3y}=\sqrt{3}$

$$\sin y+2\sin y+\sin 3y=\sqrt{3}\cos y+\sqrt{3}\cos 2y+\sqrt{3}\cos 3y$$

Hay $(\sin y-\sqrt{3}\cos y)+(\sin 2y-\sqrt{3}\cos 2y)+(\sin y-\sqrt{3}\cos 3y)$

$$\Leftrightarrow\left(\sin y-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos y\right)+\left(\sin 2y-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 2y\right)+\left(\sin 3y-\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 3y\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)\cos y+\sin\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos y+\frac{1}{2}\right)=0$$

Với điều kiện $\cos y \neq -\frac{1}{2}$, chỉ còn thừa số:

$$\sin\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Rightarrow 2y-\frac{\pi}{3}=k\pi$$

$$\Rightarrow 2y=\frac{\pi}{3}+k\pi \Rightarrow \boxed{y=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}} \quad (k\in Z)$$

Bài 122

Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác vuông khi và chỉ khi các góc A, B, C của nó thoả mãn hệ thức:

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$$

Đ.H. Dân lập Thăng long (1996)

GIẢI

Từ hệ thức đã cho, ta suy ra:

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\cos^2 C-1=0 \qquad (1)$$

Biết $A+B=\pi-C$ nên $\cos(A+B)=-\cos C$ nên (1) viết thành:

$$\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2(A+B)=0$$

$$\frac{1}{2}.2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)=0$$

$$\cos(A+B)(\cos(A-B)+\cos(A+B))=0$$

$$-\cos C.(2\cos A.\cos B)=0$$

Do có hoặc $\cos A=0$ suy ra $A=90^0$

Hoặc cosB, hoặc $\cos C=0$. Vậy ABC là tam giác vuông.

Bài 123

Cho hàm số: $f(x) = \frac{\sin 2x}{2} - 5\cos x - 3x$

1. **Tính đạo hàm f'(x)**
2. **Giải phương trình f'(x) = 0**

Đ.H. Dân lập Thăng long (1996)

GIẢI

Ta có: $f(x) = \frac{\sin 2x}{2} - 5\cos x - 3x$

1. $f'(x) = \cos 2x + 5\sin x - 3$
2. $f'(x) = \cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm $\sin x = \frac{1}{2}$ và $\sin x = 2$ (loại)

với $\sin x = \frac{1}{2}$ thì $\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ hoặc $\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 124

Tìm m sao cho phương trình: $\frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} = m$

có đúng hai nghiệm thoả mãn điều kiện $0 \le x \le \pi$

Đ.H. Thương mại (1996)

GIẢI

Với điều kiện: $0 \le x \le \pi$ thì sinx thoả mãn điều kiện $0 \le \sin x \le 1$

Phương trình đã cho trở thành:

$$2\sin x - 1 = m\sin x + 3m$$

Hay $\quad (m - 2)\sin x = -3m - 1$

$$\sin x = \frac{-3m-1}{m-2} \quad (m \ne 2)$$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thoả mãn điều kiện

$0 \le x \le \pi$ thì $\sin x \in (0,1)$

Do đó $\begin{cases} \dfrac{-3m-1}{m-2} \geq 0 \\ \dfrac{-3m-1}{m-2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+1)(m-2) \leq 0 \\ \dfrac{-3m-1}{m-2} - 1 \leq 0 \end{cases}$

- Với $(3m+1)(m-2) \leq 0$ thì m phải $-\dfrac{1}{3} \leq m < 2$
- Với $\dfrac{-3m-1}{m-2} - 1 = \dfrac{-4m+1}{m-2} \leq 0$ thì $m \leq \dfrac{1}{4}$ hoặc $m \geq 2$

Từ đó suy ra: $\boxed{-\dfrac{1}{3} \leq m < \dfrac{1}{4}}$

Bài 125

Giả sử ABC là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh:

$$tg^6A + tg^6B + tg^6C \geq 81$$

Đ.H. Thương mại (1996)

GIẢI

Trong tam giác ta có:

$$A + B = \pi - C$$

$$\Rightarrow \quad tg(A + B) = (\pi - C) = -tgC$$

$$\Rightarrow \quad \frac{tgA + tgB}{1 - tgA.tgB} = -tgC \qquad (1)$$

Từ (1) ta suy ra

$$tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$tgAtgBtgC = tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$$

$$= (tgA.tgB.tgC)^3 \geq 27tgA.tgB.tgC$$

$$= (tgA.tgB.tgC)^2 \geq 27$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta cũng có:

$$tg^6A + tg^6B + tg^6C \geq 3\sqrt[3]{tg^6Atg^6Btg^6C}$$

$$\geq 3tg^2Atg^2Btg^2C$$

$$\geq 3.27 = 81 \text{ (đpcm)}$$

Bài 126

Giải phương trình: $4\sin x + 3|\cos x| = k$ với $k = 3$ và $k = 4$

ĐH. Thuỷ lợi (1996)

GIẢI

- Với $k = 3$ ta có phương trình: $3|\cos x| = 3 - 4\sin x$ (1)

Với $3 - 4\sin x \geq 0$ suy ra $-1 \leq \sin x \leq \frac{3}{4}$

Bình phương 2 vế của (1), ta có: $9\cos^2 x = 9 - 24\sin x + 16\sin^2 x$

Rút gọn $25\sin^2 x - 24\sin x = 0$

Giải ra, ta được: $\sin x = \frac{24}{25}$ (loại vì $> \frac{3}{4}$)

$\sin x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $k = 4$ ta có phương trình: $3|\cos x| = 4 - 4\sin x$ (2)

Bình phương 2 vế của (2) và rút gọn ta được: $25\sin^2 x - 32\sin x + 7 = 0$

Giải ra, ta được: $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{7}{25} \end{cases}$ suy ra $\left[\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \arcsin\left(\frac{7}{25}\right) + 2k\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{7}{25}\right) + 2k\pi \end{array}} \right.$

Bài 127

Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$

Đ.H. Thuỷ sản Nha trang (1996)

GIẢI

Ta có: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$

Nhân vế phải của phương trình với $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ ta có:

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= \sin^3 x + \sin x\cos^2 x - \cos x\sin^2 x - \cos^3 x$$

$$2\cos^3 x + \cos x\sin^2 x - \sin x\cos^2 x = 0$$

$$\cos x(2\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x\cos x) = 0$$

- Với $\cos x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $2\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x\cos x = 0$

$$1 + \cos 2x + \frac{1-\cos 2x}{2} - \sin x\cos x = 0$$

$$3 + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x - \cos 2x = 3 \text{ vô nghiệm}$$

Phương trình vô nghiệm, vì $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Bài 128

Các góc A, B, C của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Đ.H. Xây dựng (1996)

GIẢI

Ta có: $\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \le 2\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}$ (1)

Dấu "=" xảy ra khi $\cos\frac{A-B}{2} = 1$ hay $A = B$

Tương tự $\cos B + \cos C \le 2\sin\frac{A}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $B = C$ (2)

$\cos C + \cos A \le 2\sin\frac{B}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $C = A$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $A = B = C$ nên ABC là tam giác đều.

Bài 129

Giải phương trình: $\cos^5 x + \sin^7 x + \frac{1}{2}(\cos^3 x + \sin^5 x)\sin 2x = \cos x + \sin x$

Đ.H. Xây dựng (1996)

GIẢI

Ta có: $\cos^5 x + \sin^7 x + \frac{1}{2}(\cos^3 x + \sin^5 x)\sin 2x = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow \quad \cos^5x + \sin^7x + \frac{1}{2}(\cos^3x + \sin^5x).2\sin x\cos x = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow \quad \cos^5x + \sin^7x + \cos^4x\sin x + \sin^6x\cos x = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow \quad \cos^4x(\cos x + \sin x) + \sin^6x(\cos x + \sin x) - (\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)(\cos^4x + \sin^6x - 1) = 0$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = 0 \\ \cos^4 x + \sin^6 x - 1 = 0\end{array}\right.$

- Với $\cos x + \sin x = 0$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{suy ra} \quad \boxed{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

- Với $\cos^4x + \sin^6x - 1 = 0$

$\cos^4x + \sin^6x = 1$ (1)

Do $|\cos x| \le 1$ và $|\sin x| \le 1$ nên $\cos^4x \le \cos^2x$

$\sin^6x \le \sin^2x$

suy ra $\cos^4x + \sin^6x \le \cos^2x + \sin^2x = 1$

Do đó: $\cos^2x=1$ hoặc $\sin^2x=1 \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi}$ hoặc $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $k \in Z)$

- Có thể giải (1) bằng cách hạ bậc $\cos^4x$ và $\sin^6x$

$$\left(\frac{1+co2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-co2x}{2}\right)^3 - 1 = 0$$

Khai triển và rút gọn ta được phương trình:

$(\cos x - 1)(\cos^2 2x - 4\cos 2x - 5) = 0$

Ta cũng được nghiệm số $\boxed{x = k\pi}$ và $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

Bài 130

Tìm nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$ của phương trình:

$$\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$$

Đ.H. Văn hoá Hà Nội (1996)

GIẢI

Ta có: $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+2\pi\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-4\pi\right)=1+2\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=1+2\sin x$

$\cos 2x+3\sin x=1+2\sin x$

$1-2\sin^2 x+3\sin x=1+2\sin x$

$2\sin^2 x-\sin x=0$

$2\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$

- Với $\sin x=0$ suy ra $x=k\pi$
- Với $\sin x-\frac{1}{2}=0$ suy ra $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ và $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Nghiệm $x\in\left(\frac{\pi}{2},3\pi\right)$ ta có các nghiệm :

$(\pi, 2\pi)$, $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)$, $\frac{5\pi}{6}$ và $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi\right)$

Bài 131

Các tham số a và b phải thoả mãn phương trình gì để phương trình sau đây có nghiệm: $x^2+5=2(x-2\cos(ax+b))$

ĐH. Văn hoá TP. HCM. (1996)

GIẢI

Ta có: $x^2+5=2(x-2\cos(ax+b))$

$x^2-2x+5=-4\cos(ax+b)$

$(x-1)^2+4=-4\cos(ax+b)$

Vế trái ≥ 4, vế phải ≤ 4 nên phương trình chỉ có nghiệm khi:

$$\begin{cases}(x-1)^2+4=4\\ -4\cos(ax+b)=4\end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases}x=1\\ \cos(ax+b)=-1\end{cases}$$

Khi x=1 thì $\cos(ax+b)=\cos(a+b)=-1$ suy ra $\boxed{a+b=\pi+2k\pi}$ $(k\in Z)$

Bài 132

Cho phương trình: $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=k\cos x$

1. Giải phương trình khi k = 2

2. Giải và biện luận phương trình trong trường hợp tổng quát.

Đ.H. Văn hoá T.P. HCM. (1996)

GIẢI

1. Khi k = 2 ta có phương trình:

$$\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=2\cos x \qquad (1)$$

Vế trái của phương trình luôn dương nên vế phải cosx > 0

Bình phương (1) rồi rút gọn ta có:

$$2+2|\cos x|=4\cos^2 x \quad \text{với } \cos x>0$$

Nên ta có phương trình:

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0$$

Giải ra, ta được: $\cos x=1$ suy ra nghiệm $x=2k\pi$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}<0$ loại vì $\cos x>0$

2. Trong trường hợp tổng quát ta cần có điều kiện kcosx > 0.

Ta có: $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=k\cos x \qquad (1)$

Bình phương 2 vế và rút gọn ta được: $k^2\cos^2 x-2|\cos x|-2=0$

Đặt $t=|\cos x|$ ta có phương trình: $k^2t^2-2t-2=0$ với $0\le t\le 1$

Ta được nghiệm số $t\ge 0$ là: $t=\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}\le 1$ do đó:

$\sqrt{1+2k^2}\le k^2-1 \Rightarrow |k|\ge 2$

Vậy nếu $k\ge 2$ thì $\cos x>0$ và $\cos x=\dfrac{1+\sqrt{1+2k^2}}{k^2}$

nếu $k\le -2$ thì $\cos x<0$ và $\cos x=\dfrac{-\left(1+\sqrt{1+2k^2}\right)}{k^2}$

Bài 133

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh ằng:
$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

Đ.H. Văn hoá T.P. HCM (1996)

GIẢI

Từ định lý hàm số côsin $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ta suy ra:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (1)$$

Từ công thức tính diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, ta có:

$$\sin A = \frac{2S}{bc} \qquad (2)$$

ừ (1) và (2) ta có: $\text{cotg}A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{2S}{bc}} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\left(\frac{abc}{4R}\right)} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc} \qquad (3)$$

Tương tự, ta có: $\text{cotg}B = \dfrac{R(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$ (4)

$$\text{cotg}C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc} \qquad (5)$$

Cộng vế với vế (3), (4) và (5) ta có:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

Cách khác $\text{cotg}A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$ (6)

Có thể sử dụng định lý hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$. Suy ra $\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\sin C = \dfrac{c}{2R}$ rồi thay vào mẫu ở (6):

$$\text{cotg}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{a}{2R} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$$

ta cũng được kết quả tương tự.

Bài 134

Tam giác ABC có các góc và các cạnh thảo mãn hệ thức:

$$\frac{1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2a+c}{2a-c}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác cân.

Đ.H. Y khoa Hà Nội (1996)

GIẢI

Ta có: $\frac{1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2a+c}{2a-c}$ (1)

Cộng thêm 1 vào hai vế của hệ thức (1) ta có:

$$1+\frac{1+\cos B}{1-\cos B}=1+\frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos B+1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2a-c+2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-\cos B}=\frac{4a}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow 4a-2c=4a-4a\cos B$$

$$\Leftrightarrow c=2a\cos B \quad (2)$$

Biết $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ suy ra $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ (3)

Thay cosB ở (3) vào (2) ta có:

$$c=2a\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) \Leftrightarrow c^2=a^2+c^2-b^2$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

Do đó, tam giác ABC là tam giác cân ở C

Bài 135

Giải phương trình: $(\cos x-\sin x)\cos x\sin x=\cos x.\cos 2x$

Đ.H. Y khoa Hà Nội (1996)

GIẢI

Thay $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$ vào phương trình đã cho, ta có:

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\cos x\sin x=\cos x(\cos^2x-\sin^2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos x - \sin x)\left[\sin x - (\cos x + \sin x)\right] = 0$$

Do đó: $\cos x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

$\cos x - \sin x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 136

Giải phương trình: $(1 + \mathrm{tg}x)\cos^3 x + (1 + \mathrm{cotg}x)\sin^3 x = \sqrt{2\sin 2x}$

Đ.H. Y khoa Hải Phòng (1996)

GIẢI

Điều kiện: $\sin 2x > 0$ (1)

$\sin x\cos x > 0$

Biết $1 + \mathrm{tg}x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

$1 + \mathrm{cotg}x = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\cos^3 x\,\frac{(\sin x + \cos x)}{\cos x} + \frac{(\sin x + \cos x)}{\sin x}\sin^3 x = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x(\sin x + \cos x) + \sin^2 x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x + \cos x \ge 0 \\ (\sin x + \cos x)^2 = 4\sin x\cos x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x > 0 \quad \text{và} \quad \cos x > 0 (\text{vì} \ \sin x\cos x > 0) \\ \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 4\sin x\cos x \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin 2x$$

$$\sin 2x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$$

Nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ thoả mãn $\sin x > 0$; $\cos x > 0$, cần chọn k là số chẵn nên: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 137

Chứng minh, nếu tam giác ABC không phải là tam giác tù thì:

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$$

Đ.H. Y khoa Hải phòng (1996)

GIẢI

Tam giác ABC không có góc tù thì cosA, cosB và cosC đều có giá trị dương nên: $\sin A.\sin B \geq \sin A.\sin B - \cos A.\cos B$

$\Leftrightarrow \quad \sin A.\sin B \geq -\cos(A + B) = \cos C \geq 0 \quad (1)$

Hai vế của bất đẳng thức đều dương, bình phương 2 vế (1) ta có:

$$\sin^2 A.\sin^2 B \geq \cos^2 C$$

Tương tự:

$$\sin^2 B.\sin^2 C \geq \cos^2 A$$
$$\sin^2 C.\sin^2 A \geq \cos^2 B$$

Ta có:

$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) = 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C +$

$+ \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$

$> 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C +$

$+ \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$

$= 1 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) + (\sin^2 C + \cos^2 C)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Vậy:

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$$

Bài 138

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Gọi a, b, c lần lượt là các cạnh đối diện với các góc A, B, C. Chứng tỏ rằng: $b^2 + c^2 > a^2$

Đ.H. Y Dược T.P. Hồ Chí Minh (1996)

GIẢI

Tam giác ABC có 3 góc nhọn, do đó cosA > 0

Theo định lý hàm số cos ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2$

Suy ra $b^2 + c^2 > a^2$

Bài 139

Tìm y để bất phương trình:

$x^2 + 2x(\cos y - \sin y) + 2\sin^2 y > 0$ **nghiệm đúng với mọi x.**

Đ.H. Y Dược T.P. Hồ Chí Minh (1996)

GIẢI

Bất phương trình đã cho $x^2 + 2x(\cos y - \sin y) + 2\sin^2 y$ là bất phương trình bậc hai theo x, để phương trình này đúng với mọi x thì $\Delta' \le 0$.

$$\Delta' = (\cos y - \sin y)^2 - 2\sin^2 y \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 y + \sin^2 y - 2\sin y\cos y - 2\sin^2 y \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \sin 2y - 2\sin^2 y \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2y - \sin 2y \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(2y + \frac{\pi}{4}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2y + \frac{\pi}{4}\right) \le 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi \le 2y + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{8} + k\pi \le y \le \frac{5\pi}{8} + k\pi \quad (k \in Z)$$

Bài 140

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác bất kỳ, S là diện tích của tam giác đó. Chứng minh: $S^2 \le \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$

Đ.H. Y Dược T.P. Hồ Chí Minh (1996)

GIẢI

Theo công thức Hêrông: $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

Suy ra: $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}((b + c + a)(b + c - a)(a + c - b)((a - (c - b)))$$

$$= \frac{1}{16}((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (c-b)^2) \le \frac{1}{16}((b+c)^2 - a^2)a^2$$

$$= \frac{1}{16}(b^2 + c^2 + 2bc - a^2)a^2$$

$$\leq \frac{1}{16}(2b^2 + 2c^2 - a^2)a^2$$

$$= \frac{1}{16}(2b^2a^2 + 2c^2a^2 - a^4)$$

$$\leq \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + a^4 + c^4 - a^4) = \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4) \text{ (đpcm)}$$

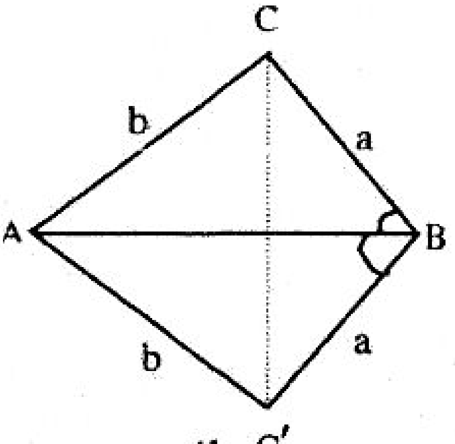
Bài 141

Chứng tỏ rằng có thể tính diện tích tam giác ABC bởi công thức:

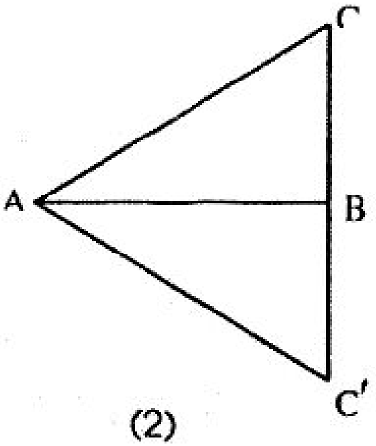
$$S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$$

Trung tâm đào tạo bồi dưỡng C.B.Y.T. (1996)

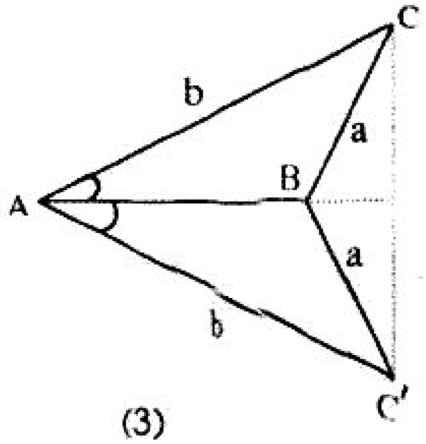
GIẢI



(1



(2)



(3)

Trường hợp góc B nhọn hay vuông (hình 1 và 2)

$AC = AC' = b$

$BC = BC' = a$

$B\hat{A}C = B\hat{A}C' = \hat{A}$

$A\hat{B}C = A\hat{B}C' = \hat{B}$

dt $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ dt tứ giác ACBC′

$= \frac{1}{2}$(dt $\Delta CAC'$ + dt $\Delta CBC'$)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b^2\sin 2A + \frac{1}{2}a^2\sin 2B\right) = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Trường hợp góc B tù (hình 3), ta có:

$$2dt\ \Delta ABC = dt\ \Delta ACC' - dt\ \Delta BCC'$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A - \frac{1}{2}a^2\sin(2\pi - 2B)$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A - \frac{1}{2}a^2\sin(-2B)$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A - \frac{1}{2}a^2(-\sin 2B)$$

$$= \frac{1}{2}b^2\sin 2A + \frac{1}{2}a^2\sin 2B$$

$$dt\ \Delta ABC = \frac{1}{4}\left(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A\right)$$

Bài 142

Gải phương trình: $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$

Cao đẳng Hải quan (1996)

GIẢI

Điều kiện $\begin{cases} 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \neq 0 \\ 1-\sin^3 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Phương trình đã cho: $\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = \dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$

Có thể biến đổi thành:

$$\frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos x}{1-\sin x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1-\sin x} - \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}\right) = 0$$

- Với $\frac{1-\cos x}{1-\sin x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 1\\ \sin x \neq 1.\end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = k2\pi}$ $(k\in Z)$

- Với $\frac{1+\cos x}{1+\sin x} - \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}=0$

  Chuyển vế, nhân chéo và rút gọn ta được:

  $$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x\cos x) = 0$$

- Suy ra $\sin x - \cos x = 0$ $\quad \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}+k\pi}$

  - Và $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$

  Đặt $\sin x + \cos x = t$ $\left(|t| \le \sqrt{2}\right)$ suy ra $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

  Ta được phương trình:

  $$t + \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0$$

  Phương trình có 2 nghiệm: $t_1 = -1-\sqrt{2}$ (loại)

  $$t_2 = -1+\sqrt{2}$$

  $$\Rightarrow \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}-1$$

  $$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}-1$$

  $$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2k\pi} \quad (k\in Z)$$

Bài 143

Giả sử A, B, C là ba góc của tam giác ABC thoả mãn:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) = 27$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Cao đẳng Hải quan (1996)

GIẢI

Bất đẳng thức đã cho:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\geq 27$$

Khai triển vế trái, ta được:

$$1+\underbrace{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}}_{}+\underbrace{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}}_{}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\geq 1+3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}+3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\right)^3\geq\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}\right)^3=27$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$

Ta tìm hiệu: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\leq 0$

$$\frac{1}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\leq 0$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sin\left(\frac{C}{2}\right)\right]\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\leq 0$$

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{8}\geq 0 \qquad (1)$$

(1) luôn đúng vì tam thức này có $\Delta\leq 0$. Dấu "=" khi A = B.

Cũng có thể viết (1) thành:

$$4\sin^2\frac{C}{2}-4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}+\cos^2\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{A-B}{2}\geq 0$$

$$\left[2\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right]^2+\sin^2\frac{A-B}{2}\geq 0 \qquad (2)$$

(2) luôn đúng, dấu "=" xảy ra $\sin\frac{A-B}{2}=0\Leftrightarrow A=B$

$$2\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} = \cos 0^0 = 1;\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 60^0$$

$\Rightarrow$ ΔABC đều

Bài 144

a/ Chứng minh rằng với mọi x dương thì: $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$

b/ Tìm m để $\cos^2 2x - 8\sin x\cos x - 4m + 3 \geq 0$ **với mọi** $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Cao đẳng Hải quan (1996)

GIẢI

a/ Ta có: $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0$$

Đặt $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$

Xét đạo hàm

$$f'(x) = x - \sin x$$

Đạo hàm bậc hai

$$f''(x) = 1 - \cos x \geq 0 \text{ với } \forall x > 0$$

Do đó $f'(x)$ đồng biến $\Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0\ (\forall x > 0)$

Suy ra $f(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(x) > f(0) = 0\ (\forall x > 0)$

b/ Ta có:

$$\cos^2 2x - 8\sin x\cos x - 4m + 3 \geq 0\ \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Leftrightarrow\quad 1 - \sin^2 2x - 8\sin x\cos x - 4m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin^2 2x + 4\sin 2x + 4(m-1) \leq 0\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Đặt $\sin 2x = u$ với $u \in [0; 1]$ ta có:

$$u^2 + 4u + 4(m-1) \leq 0\ \forall u \in [0; 1]$$

Do đó: $\begin{cases} 1.f(0) \leq 0 \\ 1.f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.4(m-1) \leq 0 \\ 1.(1+4+4(m-1)) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{m \leq -\frac{1}{4}}$

Bài 145

Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 > 200$ và có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 5$. Chứng minh rằng ABC là tam giác có ba góc nhọn.

Đ.H. Công đoàn (1996)

GIẢI

Từ bất đẳng thức đã cho $a^2 + b^2 + c^2 > 200$ ta suy ra:

$$(2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2 + (2R\sin C)^2 > 200$$

$$4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 200$$

$$4.5^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 200$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2 \qquad (1)$$

Biến đổi vế trái: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$

$$= 2 - \frac{(\cos 2A + \cos 2B)}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A + B)\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\,(\cos(A-B) + \cos(A + B))$$

$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\cos A\cos B\cos C > 0$ nên A, B, C là ba góc nhọn.

Bài 146

Cho tam giác ABC có hai đỉnh A(4, 0) ; B(0, 3) , có diện tích S=22,5 và có trọng tâm thuộc đường thẳng $x - y - 2 = 0$.

Xác định toạ độ đỉnh C.

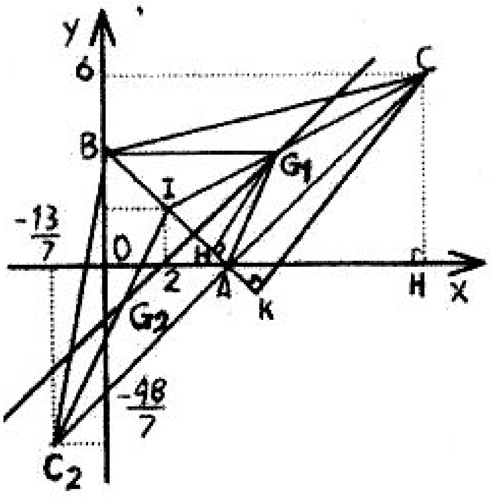
Đ.H. Công đoàn (1996)

GIẢI

Độ dài cạnh AB của tam giác là: $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = 5$

Hai tam giác IG_1H và IC_1K đồng dạng nên khoảng cách từ G_1 đến cạnh AB bằng $\frac{1}{3}$ khoảng cách từ C_1 đến AB.

Diện tích $\Delta BG_1A = \frac{1}{3}$ diện tích ΔC_1AB nên bằng $\frac{22,5}{3} = 7,5$



Diện tích $\Delta BG_1A = \frac{1}{3}$ diện tích ΔC_1AB

nên bằng $\frac{22{,}5}{3} = 7{,}5$

Ta có:

Diện tích $\Delta BG_1A = 7{,}5 = \frac{1}{2} AB.G_1H$

Suy ra: $G_1H = 3$

Phương trình đường AB là: $\frac{x-4}{0-4} = \frac{y-0}{3-0}$

$\Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$

Trọng tâm $G_1(x_0, y_0)$ thuộc đường thẳng $x_0 - y_0 - 2 = 0$. G_1H là khoảng cách từ G_1 đến đường AB nên:

$$3 = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Leftrightarrow 3x_0 + 4y_0 - 12 = \pm 15$$

Giải ra, ta được $G_1(5, 3)$ và $G_2\left(\frac{5}{7}, -\frac{9}{7}\right)$

Biết trung điểm I của AB là $I\left(2, \frac{3}{2}\right)$ và $\overrightarrow{C_1G_1} = 2\overrightarrow{G_1I}$; $\overrightarrow{C_2G_2} = 2\overrightarrow{G_2I}$

Ta suy ra $C_1(11, 6)$ và $C_2\left(-\frac{13}{7}, -\frac{48}{7}\right)$

Bài 147

Giải phương trình: $|\text{tg}x| = \text{cotg}x + \frac{1}{\cos x}$

Đ.H. Công đoàn (1996)

GIẢI

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Trường hợp tgx > 0, ta có: $\text{tg}x = \text{cotg}x + \frac{1}{\cos x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{ll} \sin x = 1 & \text{(loại)} \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} & \end{array}\right.$

Với $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ (loại, vì $tgx > 0$)

$$\boxed{x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi}$$

Trường hợp $tgx < 0$ ta có:

$$-\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$\Leftrightarrow \quad -\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = -1$ (loại, vì khi đó $\cos x = 0$)

Vậy, phương trình có nghiệm số $\boxed{x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 148

Giải phương trình lượng giác: $\dfrac{1 - tgx}{1 + tgx} = 1 + \sin 2x$

Viện Đại học Mở Hà Nội (1996, D)

GIẢI

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ tgx \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{1 - tgx}{1 + tgx} = 1 + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = (\cos x + \sin x)^2$

$\Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = (\cos x + \sin x)^3$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cot g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\frac{1}{1+\cot g^{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\cot g^{3}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2=0$$

$$\left[\cot g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right]\left[\cot g^{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\right]=0$$

Suy ra:

$$\left[\begin{array}{l}\cot g\left(x+\frac{\pi}{4}-1=0\right) \quad \Rightarrow x=k\pi \quad (x\in Z)\\ \cot g^{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cot g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2=0,\ \text{PT này vô nghiệm} \quad \text{vì } \Delta<0\end{array}\right.$$

Bài 149

Tam giác ABC có diện tích S và các cạnh BC= a; AC=b; AB=c. Chứng minh rằng nếu: $S=\frac{1}{4}(a+b-c)(a+c-b)$

thì ABC là tam giác vuông.

GIẢI

Ta có: $S=\frac{1}{4}(a+b-c)(a+c-b)$

$$\Leftrightarrow S^{2}=\frac{1}{16}(a+b-c)^{2}(a+c-b)^{2} \qquad (1)$$

Theo công thức Hêrông ta có:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} \qquad (2)$$

Bình phương (2) thì (2) và (1) bằng nhau, ta có:

$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=(a+b-c)^{2}(a+c-b)^{2}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a)=(a+b-c)(a+c-b)$

$\Leftrightarrow (b+c+a)(b+c-a)=(a-(c-b))(a+(c-b))$

$\Leftrightarrow \quad (b+c)^{2}-a^{2}=a^{2}-(c-b)^{2}$

$\Leftrightarrow \quad b^{2}+2bc+c^{2}-a^{2}=a^{2}-(c^{2}-2bc+b^{2})$

$\Leftrightarrow \quad b^{2}+c^{2}=a^{2}$

Tam giác ABC có "bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại" là tam giác vuông (định lý Pi ta go)

Bài 150

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có các góc thoả mãn điều kiện: $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = 3$ thì các cạnh của nó thoả mãn: 2c = a + b (a, b, c là độ dài các cạnh tương ứng với các góc A, B, C)

GIẢI

Ta có: $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = 3$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A-B}{2} \qquad (1)$$

Nhân 2 vế của (1) với $\sin\frac{A+B}{2} \neq 0$ (vì $A + B \neq \pi$), ta được:

$$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+B) = \frac{1}{2}(\sin A + \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \sin C = \frac{1}{2}(\sin A + \sin B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2R} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R}\right)$$

Suy ra $c = \frac{1}{2}(a + b)$

Hay $2c = (a + b)$ (đpcm)

Bài 151

Chứng minh rằng: $\mathrm{tg}30^0 + \mathrm{tg}40^0 + \mathrm{tg}50^0 + \mathrm{tg}60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$

Đ.H.. Đà Lạt

GIẢI

Ta có: $\mathrm{tg}30^0 + \mathrm{tg}40^0 + \mathrm{tg}50^0 + \mathrm{tg}60^0 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0$

$$\begin{aligned}
\text{VT} &= (\mathrm{tg}30^0 + \mathrm{tg}60^0) + (\mathrm{tg}40^0 + \mathrm{tg}50^0)\\
&= \frac{\sin 90^0}{\cos 30^0 \cos 60^0} + \frac{\sin 90^0}{\cos 40^0 \cos 50^0}\\
&= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 90^0 + \cos 10^0)}\\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\cos 10^0}\\
&= \frac{4\cos 10^0 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos 10^0} = \frac{4\left(\cos 10^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3}\cos 10^0}\\
&= \frac{4(\cos 10^0 + \cos 30^0)}{\sqrt{3}\cos 10^0} = \frac{4.2\cos 20^0.\cos 10^0}{\sqrt{3}\cos 10^0}\\
&= \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^0 \qquad \text{(đpcm)}
\end{aligned}$$

Bài 152

Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC ta có:

$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B = 2\mathrm{cotg}\frac{C}{2}$ **thì ABC là tam giác cân**

Đ.H. Đà Lạt

GIẢI

Biết $A + B + C = \pi$ nên $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$

Do đó: $\mathrm{cotg}\frac{C}{2} = \mathrm{tg}\frac{A+B}{2}$

Từ hệ thúc đã cho, ta có: $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B = 2\mathrm{tg}\frac{A+B}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A + \text{tg}B - 2\text{tg}\frac{A+B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A - \text{tg}\frac{A+B}{2} + \text{tg}B - \text{tg}\frac{A+B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\left(A - \frac{A+B}{2}\right)}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}} + \frac{\sin\left(B - \frac{A+B}{2}\right)}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}} = 0 \qquad (1)$$

Do $\cos\dfrac{A+B}{2} \neq 0$ nên rút gọn (1) ta được:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A} + \frac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A-B}{2}\cos B + \sin\frac{B-A}{2}\cos A = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A-B}{2}(\cos B - \cos A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ \cos B = \cos A \end{array}\right.$$

Ta suy ra A = B và ΔABC là tam giác cân tại C.

Bài 153

a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác vuông, c là cạnh huyền. Chứng minh: $\log_{c+b}a + \log_{c-b}a = 2\log_{c+b}a.\log_{c-b}a$

GIẢI

Trong tam giác vuông cạnh huyền c, ta có: $c^2 = a^2 + b^2$

hay $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$ (1)

Do $a \neq 1$ nên $c - b \neq 1$ và $c + b \neq 1$, nên logarit cơ số a hai vế của 1), ta được:

$$\log_a a^2 = \log_a(c-b)(c+b) = \log_a(c-b) + \log_a(c+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = \frac{1}{\log_{c-b}a} + \frac{1}{\log_{c+b}a} = \frac{\log_{c+b}a + \log_{c-b}a}{\log_{c-b}a\log_{c+b}a}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\log_{c+b}a.\log_{c-b}a = \log_{c+b}a + \log_{c-b}a \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 154

Cho tam giác ABC có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$.

Chứng minh rằng $tgA.tgB < 1$

Đ.H. Quốc gia (1996, A)

GIẢI

Ta có: $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C = \frac{1}{2}(1-\cos 2A) + \frac{1}{2}(1-\cos 2B)+\sin^2C$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\left[2\cos(A+B)\cos(A-B)\right] - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\left[\cos(A-B) - \cos C\right]$$

$$= 2 + \cos C.(2\cos A.\cos B)$$

$$= 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$2 + 2\cos A\cos B\cos C < 2$$

Suy ra $\quad 2\cos A\cos B\cos C < 0 \qquad (1)$

(1) chứng tỏ trong ba góc A,B,C phải có 1 góc tù (vì cos của góc tù < 0).

Tam giác ABC có một góc tù và hai góc nhọn

Giả sử C tù thì (A + B) nhọn, ta có: $tg(A + B) > 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} > 0 \qquad (2)$$

Vì tử số của (2) lớn hơn 0 nên mẫu số cũng phải dương, suy ra:

$$1 - tgAtgB > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tgA.tgB < 1$$

*** Cách khác:** $A + B = \pi - C < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < A < \frac{\pi}{2} - B$

$$0 < tgA < tg\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{1}{tgB}$$

Suy ra $tgAtgB < 1$

Bài 155

Giải phương trình: $tg^2x - tgxtg3x = 2$

Đ.H. Quốc gia (1996, A)

GIẢI

Điều kiện $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 3x \neq 0\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\end{cases}$

Phương trình đã cho: $tg^2x - tgxtg3x = 2$

$$\Leftrightarrow \quad tgx(tgx - tg3x) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad tgx\,\frac{\sin(x-3x)}{\cos x\cos 3x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad tgx\left(\frac{-\sin 2x)}{\cos x\cos 3x}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{-2\sin x\cos x)}{\cos x\cos 3x}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2\sin^2 x}{\cos x\cos 3x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin^2x = 2\cos3x\cos x \qquad (1)$$

Biết $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

Nên $2\cos3x\cos x = 2.\,\frac{1}{2}\left[\cos(3x+x) + \cos(3x-x)\right] = \cos4x + \cos2x$

và $\sin^2a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ nên $-2\sin^2x = \cos2x - 1$

Do đó, từ (1) ta có: $\cos2x - 1 = \cos4x + \cos2x \Leftrightarrow \cos4x = -1 = \cos\pi$

Phương trình có nghiệm: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

Bài 156

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC. Cho biết $\frac{abc}{a+b+c} = \alpha$. Chứng minh rằng tích của bán kính đường tròn ngoại tiếp vớibán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng $\frac{\alpha}{2}$.

Đ.H. Quốc gia (1996, B)

GIẢI

Gọi R, r là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. S, a, b, c là diện tích và các cạnh tam giác ABC.

Ta có: $S = \frac{abc}{4R}$ suy ra : $R = \frac{abc}{4S}$

(1)

$$S = pr = \frac{a+b+c}{2}r \quad \text{(p là nửa chu vi)}$$

Suy ra: $r = \frac{2S}{a+b+c}$ (2)

Do đó: $R.r = \frac{abc}{4S}.\frac{2S}{a+b+c} = \frac{abc}{2(a+b+c)} = \frac{\alpha}{2}$

Bài 157

Giải phương trình: $\mathbf{tgx = cotgx + 2cotg^3 2x}$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1996, B)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$ suy ra: $x \neq k\frac{\pi}{2}$ (1)

Ta có:

$$tgx = cotgx + 2cotg^3 2x$$
$$tgx - cotgx = 2cotg^3 2x$$
$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2\cot g^3 2x$$
$$-2cotg2x = 2cotg^3 2x \text{ suy ra } cotg2x = 0$$

Phương trình có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$ thoả mãn (1)

Bài 158

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\mathbf{M = 4cosA + 5cosB + 5cosC}$ **trong đó A, B, C là các góc của một tam giác tuỳ ý.**

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1996, B)

GIẢI

Ta có: $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$

$$\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

Do đó $M = 4\cos A + 5\cos B + 5\cos C$

$$= 4\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 5.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 4 - 8\left(\sin^2\frac{A}{2} - \frac{5}{4}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 4 - 8\left[\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{5}{8}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 - \frac{25}{64}\cos^2\frac{B-C}{2}\right]$$

$$= 4 - 8\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{5}{8}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2 + \frac{25}{8}\cos^2\frac{B-C}{2}$$

Hay $M = 4 + \frac{25}{8}\cos^2\frac{B-C}{2} - 8\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{5}{8}\cos\frac{B-C}{2}\right)^2$

Suy ra $M \le 4 + \frac{25}{8}\cos^2\frac{B-C}{2} \le 4 + \frac{25}{8}$

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2} - \frac{5}{8}\cos\frac{B-C}{2} = 0 & \text{suy ra} \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{5}{8}\cos\frac{B-C}{2} \\ \cos\frac{B-C}{2} = 1 & \text{suy ra} \quad B = C \end{cases}$$

Khi $B = C$ thì $\sin\frac{A}{2} = \frac{5}{8}\cos 0^0 = \frac{5}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của M là $4 + \frac{25}{8} = \frac{57}{8}$

Bài 159

Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số: $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$

sao cho đồ thị của hàm số f(x) và F(x) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1996, B)

GIẢI

Ta có: $\int f(x)dx = F(x) + C$

$$\int\left(2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}\right)dx = 2\int \sin 5x dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{3}{5}\int dx$$

$$= -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{5}x + C$$

Vậy $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5}x + C$

Đồ thị hàm số f(x) và F(x) cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung thì $x = 0$ $\quad f(0) = F(0)$

$$2\sin 0^0 + \sqrt{0} + \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}\cos 0^0 + \frac{2}{5}.0 + C$$

$$\frac{3}{5} = -\frac{2}{5} + C$$

$$C = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Khi đó: $F(x) = -\frac{2}{5}\cos 5x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 1$

Bài 160

Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\sqrt{1-x})^2}$

GIẢI

Ta có: $\frac{1-\cos x}{(1-\sqrt{1-x})^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\sqrt{1-x})^2}{(1-\sqrt{1-x})^2(1+\sqrt{1-x})^2}$

$$\frac{1-\cos x}{(1-\sqrt{1-x})^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\sqrt{1-x})^2}{x^2}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}(1+\sqrt{1-x})^2}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Nên $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\sqrt{1-x})^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}(1+\sqrt{1-x})^2$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2 = \frac{1}{2}(1)^2(2)^2 = 2$$

Bài 161

Cho tam giác ABC mà độ dài a, b, c của các cạnh của nó thoả mãn: $a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác có một góc tù.

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1996, B)

GIẢI

Ta có: $c^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}$

Luỹ thừa bậc ba hai vế:

$$c^4 = \left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)^3$$

$$= a^4 + b^4 + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$> a^4 + b^4 + a^{\frac{4}{3}}.b^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$\geq a^4 + b^4 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}.2\sqrt{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}}$$

$$\geq a^4 + b^4 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}.2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$$

$$\geq a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$$

Suy ra $c^2 > a^2 + b^2$. Biết $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$ suy ra $C > 90^0$

Vậy tam giác ABC có một góc tù ($C > 90^0$)

Bài 162

Giải phương trình: $1 + 3\sin 2x = 2\operatorname{tg}x$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1996, chưa phân ban)

GIẢI

Điều kiện: $\cos x \neq 0$ suy ra $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ta có: $\sin 2x = \dfrac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x}$

Do đó, phương trình đã cho là:

$$1 + 3\left(\frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2x}\right) = 2\text{tg}x$$

$\Leftrightarrow \quad 2\text{tg}^3x - \text{tg}^2x - 4\text{tg}x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\text{tg}x + 1)(2\text{tg}^2x - 3\text{tg}x - 1) = 0$

Suy ra: $\text{tg}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = -1 = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Nghiệm số: $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Với $2\text{tg}^2x - 3\text{tg}x - 1 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm:

$\text{tg}x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$ có nghiệm số: $\boxed{x = \text{arctg}\dfrac{3+\sqrt{17}}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

$\text{tg}x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$ có nghiệm số: $\boxed{x = \text{arctg}\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 163

Chứng minh rằng với mọi $a \neq \frac{k\pi}{2}$ (k là số nguyên) ta đều có:

$$\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1996, Ban C)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \dfrac{2}{3}$

Biến đổi tử số: $\sin^4 a + \cos^4 a - 1 = \sin^4 a + \cos^4 a - (\sin^2 a + \cos^2 a)^2$

$= \sin^4 a + \cos^4 a - (\sin^4 a + \cos^4 a + 2\sin^2 a\cos^2 a)$

$= -2\sin^2 a \cos^2 a$

$= -\frac{1}{2}\sin^2 2a \neq 0 \qquad (1)$

Biến đổi mẫu số: $\sin^6 a + \cos^6 a - 1 = \sin^6 a + \cos^6 a - (\sin^2 a + \cos^2 a)^3$

$= \sin^6 a + \cos^6 a - (\sin^6 a + \cos^6 a + 3\sin^2 a \cos^2 a(\sin^2 a + \cos^2 a)) - 3\sin^2 a\cos^2 a$

$= -\dfrac{3}{4}\sin^2 2a \ (2)$

Do đó điều kiện mẫu số khác 0 dẫn tới: $\sin^2 2a \neq 0$ suy ra $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Lập tỷ số (1) và (2) ta được: $\dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}\sin^2 2a}{-\dfrac{3}{4}\sin^2 2a} = \dfrac{2}{3}$

Bài 164

Giải phương trình: $3\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + 2\cos^2 x = \dfrac{3(\sin^4 x + \cos^4 x - 1)}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}$

GIẢI

Theo bài trên: $\dfrac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \dfrac{2}{3}$

nên $\dfrac{3(\sin^4 x + \cos^4 x - 1)}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = 3.\dfrac{2}{3}$

nên vế phải của phương trình đã cho là $3.\left(\dfrac{2}{3}\right) = 2$

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$ suy ra $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Do đó, ta có phương trình:

$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + 2\cos^2 x = 2$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 x + \sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x(\sin x + \cos x) = 0$

- Với

  $\sin x = 0$ (loại, vì điều kiện $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$)

- Với

  $\sin x + \cos x = 0$

  Suy ra $\operatorname{tg}x = -1$, nghiệm số $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 165

Tìm các cặp số (x, y) thoả mãn phương trình:

$$8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y$$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1996, A)

GIẢI

Ta có: $8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y$

$$8^{\sin^2 x} + 8^{1-\sin^2 x} - 9 = 1 + \cos 2y$$

$$8^{\sin^2 x} + \frac{8}{8^{\sin^2 x}} - 9 = 2\cos^2 y$$

Đặt t = $8^{\sin^2 x}$ thì $1 \le t \le 8$, ta có:

$$\Leftrightarrow \quad t + \frac{8}{t} - 9 = 2\cos^2 y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{t^2 - 9t + 8}{t} = 2\cos^2 y$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(t-1)(t-8)}{t} = 2\cos^2 y \qquad (1)$$

Với $1 \le t \le 8$ thì vế trái của (1) ≤ 0 còn vế phải ≥ 0 nên phương trình chỉ thoả mãn khi:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 8 \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{l} 8^{\sin^2 x} = 1 = 8^0 \\ 8^{\sin^2 x} = 8 = 8^1 \end{array}\right. \text{ suy ra } \boxed{x = \frac{k\pi}{2}} \ (k \in Z)$$

$$\cos^2 y = 0 \text{ hay } \cos y = 0 \text{ suy ra } \boxed{y = \frac{\pi}{2} + k\pi} \ (k \in Z)$$

Bài 166

Cho hàm số: $y_k = \dfrac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$

1) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của y_1 ứng với k = 1

2) Tìm k để giá trị lớn nhất của y_k là nhỏ nhất.

Đ.H. Quốc gia TP. HCM. (1996, A)

GIẢI

1. Với k = 1 ta có: $y_1 = \dfrac{2\cos x + 2}{\cos x + \sin x + 2}$ (D = R)

Mẫu luôn ≠ 0, ta suy ra: $y_1\cos x + y_1\sin x + 2y_1 = 2\cos x + 2$

$$(y_1 - 2)\cos x + y_1\sin x = 2 - 2y_1$$

Vế trái: $\left[(y_1 - 2)\cos x + y_1(\sin x)\right]^2 \le \left[(y_1 - 2)^2 + y_1^2\right](\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Rightarrow \quad (2 - 2y_1)^2 \le ((y_1 - 2)^2 + y_1^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow \quad 4 - 8y_1 + 4y_1^2 \le y_1^2 - 4y_1 + 4 + y_1^2$

$\Leftrightarrow \quad 2y_1^2 - 4y_1 \le 0$

$\Leftrightarrow \quad y_1(y_1 - 2) \le 0$ suy ra $0 \le y_1 \le 2$

Vậy giá trị lớn nhất của y_1 là 2, giá trị nhỏ nhất của y_1 bằng 0.

2. Ta có: $y_k = \dfrac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$

Mẫu luôn ≠ 0, ta suy ra: $(y_k - 2k)\cos x + y_k\sin x = k + 1 - 2y_k$

Phương trình có nghiệm khi: $(y_k - 2k)^2 + y_k^2 \ge (k + 1 - 2y_k)^2$

$\Leftrightarrow \quad 2y_k^2 - 4y_k - 3k^2 + 2k + 1 \le 0$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6k^2 - 4k + 2}\right) \le y_k \le \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6k^2 - 4k + 2}\right)$

Do đó $y_{max} = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6k^2 - 4k + 2}\right)$, y_{max} nhỏ nhất khi

$6k^2 - 4k + 2$ nhỏ nhất, suy ra $k = \frac{1}{3}$

Bài 167

Tìm x ∈ (0, 2π) thoả mãn: $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$

Đ.H. Quốc gia TP. HCM. (1996, A)

GIẢI

Điều kiện: $1 - \cos 2x \ne 0 \Rightarrow x \ne k\pi$

Ta có: $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$

$$\frac{2\cos 2x\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}} = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\cos 2x\sin x = \sqrt{2}\,|\sin x|\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 2x\sin x = |\sin x|\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Với $0 < x \le \pi$, thì $\sin x \ge 0$ nên phương trình đã cho là:

$$\cos 2x \sin x = \sin x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\left[\cos 2x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\left[-2\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\sin\frac{\pi}{8}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

Suy ra $\sin x = 0$ thì $x = k\pi$ (loại) (điều kiện $x \neq k\pi$)

- $\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$ có các nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in Z) \qquad \text{và} \qquad x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

Vì $0 < x < \pi$ nên chỉ nhận nghiệm

$$\boxed{x = \frac{\pi}{16} \quad \text{và} \quad x = \frac{9\pi}{16}}$$

- Với $\pi < x < 2\pi$ thì $\sin x < 0$ nên ta có phương trình:

$$\cos 2x \sin x = -\sin x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 2x = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 2x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{8} = 0$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

suy ra $x = \frac{5\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$

Vì $\pi < x < 2\pi$ nên lấy $k = 2$ và $k = 3$ nên:

$$\boxed{x = \frac{21\pi}{16} \quad \text{và} \quad x = \frac{29\pi}{16}}$$

Bài 168

Cho phương trình: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{tgx}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{tgx}=m$

a/ Giải phương trình khi m = 6.

b/ Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm trong $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Đ.H. Quốc gia TP. HCM. (1996, Luật)

GIẢI

a/ Khi m = 6, ta có: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{tgx}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{tgx}=6$ (1)

Đặt $t=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{tgx}$ thì $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{tgx}=\frac{1}{t}$; $(t>0)$

Khi đó (1) trở thành: $t+\frac{1}{t}=6$ Hay $t^2-6t+1=0$; $t>0$

Phương trình có 2 nghiệm $t=3\pm2\sqrt{2}$

Với $t=3+2\sqrt{2}$ ta có: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{tgx}=3+2\sqrt{2}$

suy ra tgx = 1, nghiệm số $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}$ $(k\in Z)$

Với $t=3-2\sqrt{2}$ ta có: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{tgx}=3-2\sqrt{2}$

$$=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}$$

suy ra tgx = –1, nghiệm số $\boxed{x=-\frac{\pi}{4}+k\pi}$

b/ Với $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ thì $-\infty<tgx<+\infty$

Đặt $t=\left(3+2\sqrt{2}\right)^{tgx}$ $(t>0)$ Suy ra $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{tgx}=\frac{1}{t}$

Phương trình đã cho là: $t+\frac{1}{t}=m$ hay $t^2-mt+1=0$

Để phương trình có đúng hai nghiệm $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta phải có:

$$\begin{cases} t>0 \\ t_2>t_1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2-4>0 \\ P = t_1t_2>0; \\ S = m>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \\ P=1>0 \\ m>0 \end{cases} \Rightarrow m>2$$

Từ đó ta suy ra khi $m>2$ thì phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 169

Cho tam giác ABC với AM là trung tuyến, góc $\widehat{AMB} = \alpha$, AB = c ; AC = b và S là diện tích của tam giác ABC.

a/ Chứng minh $\text{cotg}\alpha = \frac{b^2-c^2}{4S}$

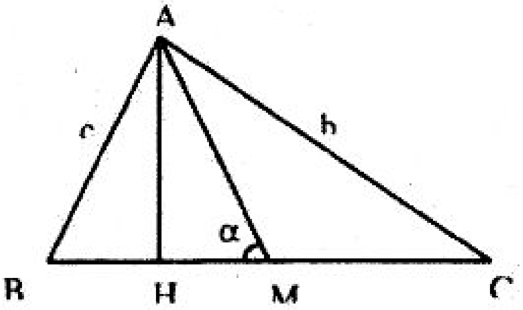
b/ Cho $\alpha = 45^0$. Chứng minh $\text{cotg}C - \text{cotg}B = 2$.

Đ.H. Quốc gia TP. HCM. (1996, Luật)

GIẢI

a/Trong tam giác ABC, ta có: $AC^2 - AB^2 = 2BC.HM$ (giả sử AC > AB)

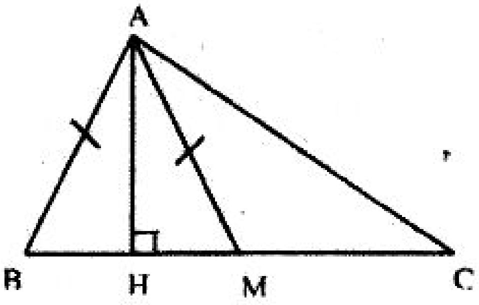
$b^2 - c^2 = 2BC.\ HM.MH = \frac{b^2-c^2}{2BC}$



Diện tích tam giác ABC là:

$S = \frac{1}{2}AH.BC$ suyra $AH = \frac{2S}{BC}$

Trong tam giác AHM, ta có:



$$\text{cotg}\alpha = \frac{HM}{AH} = \frac{\frac{b^2-c^2}{2BC}}{\frac{2S}{BC}} = \frac{b^2-c^2}{4S}$$

b/ Với $\alpha = 45^0$ thì tam giác AHM vuông cân nên AH = HM

Trong tam giác AHC ta có

$$\text{cotg}C = \frac{HC}{AH}$$

Trong tam giác AHB ta có $\text{cotg}B = \frac{BH}{AH}$

Do đó: $\text{cotg}C - \text{cotg}B = \frac{HC - BH}{AH} = \frac{(HM + MC) - (BM - HM)}{AH} = \frac{2HM}{AH}$

(vì HM = AM) nên $\text{cotg}C - \text{cotg}B = 2$.

Bài 170.

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM thoả mãn điều kiện AM = AB.

1. **Chứng minh $\text{tg}B = 3\text{tg}C$**
2. **Chứng minh $\sin A = 2\sin(B - C)$**

Đ.H. Quốc gia TP. HCM. (1996, D)

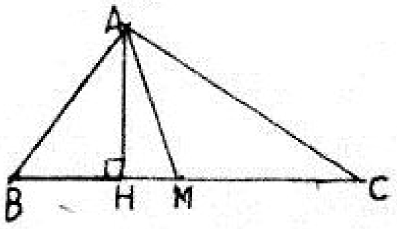
GIẢI

1. Kẻ đường cao AH. Vì AM = AB, tam giác ABM cân, nên AH cũng là trung tuyến của tam giác ABM.

Ta có: $HM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}MC$

Trong tam giác vuông AHB, ta có: $\text{tg}B = \frac{AH}{BH}$

Trong tam giác vuông AHC, ta có: $\text{tg}C = \frac{AH}{HC}$



Suy ra: $\frac{\text{tg}B}{\text{tg}C} = \frac{\frac{AH}{BH}}{\frac{AH}{HC}} = \frac{AH.HC}{BH.AH} = \frac{HC}{BH}$ (1)

Biết $HC = HM + MC$

$= BH + BM = BH + 2BH = 3BH$

Thế HC = 3BH vào (1) ta được $\text{tg}B = \frac{HC}{BH}\text{tg}C = 3\text{tg}C$

2. Từ $\text{tg}B = 3\text{tg}C$

Suy ra: $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3\sin C}{\cos C}$

$\Leftrightarrow$ $\sin B\cos C = 3\sin C\cos B$

$\Leftrightarrow$ $\sin B\cos C + \sin C\cos B = 4\sin C\cos B$

$\Leftrightarrow$ $\sin(B + C) = 2(\sin(C + B) + 2\sin(C - B))$

$\Leftrightarrow$ $\sin(B + C) = 2\sin(C + B) + 2\sin(C - B)$

$\Leftrightarrow \quad -2\sin(C - B) = \sin(C + B) = \sin A$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin(B - C) = \sin A \quad$ (đpcm)

Bài 171

Giải phương trình: $$\frac{\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$$

Đ.H. Quốc gia T.P. HCM. (1996, D)

GIẢI

Điều kiện: $1 + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \quad \sin 2x \neq -1$ suy ra $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 3\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin 2x$$

Hay $\quad 2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm: $\quad \cos x = \sqrt{2}$ (loại, vì $\cos x \leq 1$)

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

Nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ (loại, vì khi đó $\sin 2x = -1$)

Như vậy, phương trình đã cho có nghiệm: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 172

Giải phương trình: $\quad$ **3sinx + 2cosx = 2 + 3tgx**

Trung tâm đào tạo B.C.V.T. II (1996)

GIẢI

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Phương trình đã cho:

$$3\sin x + 2\cos x = 2 + 3\frac{\sin x}{\cos x}$$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 2\cos x + 3\sin x$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin x(\cos x - 1) + 2\cos x(\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x - 1)(3\sin x + 2\cos x) = 0$

*Với $\cos x - 1 = 0$ hay $\cos x = 1$ có nghiệm $\boxed{x = 2k\pi}$ $(k \in Z)$

*Với $3\sin x - 2\cos x = 0$ hay $tgx = -\frac{2}{3}$ có nghiệm:

$$\boxed{x = arctg\left(\frac{-2}{3}\right) + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 173

Giải phương trình: $3tg6x - 2tg2x = \frac{2}{\sin 8x} - \cot g4x$

Đ.H. Mỏ - Địa chất (1996)

GIẢI

Ta có: $3tg6x - 2tg2x = \frac{2}{\sin 8x} - \cot g4x$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 6x \neq 0 \\ \sin 8x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 6x \neq 0 \\ 2\sin 4x \cos 4x \neq 0 \\ 2\sin 2x \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 6x \neq 0 \\ \cos 4x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Biến đổi vế phải của phương trình, ta có:

$$\frac{2}{\sin 8x} - \cot g4x = \frac{1}{\sin 4x.\cos 4x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 4x}{\sin 4x.\cos 4x} = \frac{\sin^2 4x}{\sin 4x.\cos 4x} = tg4x$$

Do đó phương trình đã cho tương đương:

$$3tg6x - 2tg2x = tg4x$$

$$2(tg6x - tg2x) + (tg6x - tg4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin 4x}{\cos 6x.\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 6x.\cos 4x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 4x.\cos 4x + \sin 2x.\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 4x\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 4x(2\cos 4x + \frac{1}{2}) = 0$$

Do điều kiện $\sin 4x \neq 0 \Rightarrow 2\cos 4x + \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\ 4x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$$

$$\Rightarrow\ x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi$$

Bài 174

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \geq 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Đ.H. Mỏ - Địa chất (1996 A)

GIẢI

Ta biến đổi vế trái:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2} + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right) + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{-B}{2}\right)\right] + 1$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

Do đó, bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 \geq 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Hay $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow\quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$

$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$

$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$

$\Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0 \qquad (1)$

Tam thức bậc hai này có: $\Delta = \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{4} \le 0$

Nên tam thức có dấu của hệ số $a = -\frac{1}{2} < 0$ suy ra (1) luôn đúng. Vậy bất đẳng thức đã cho đúng.

Bài 175

Chứng minh: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$

Đ.H. An ninh (1996, A)

GIẢI

Ta cần chứng minh bất đẳng thức luôn đúng.

Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - \frac{3}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} + \cos\frac{A+B}{2} - 1 - \frac{1}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} - \left(1 - \cos\frac{A+B}{2}\right) - \frac{1}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4} - 2\sin^2\frac{A+B}{4} - \frac{1}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin^2\frac{A+B}{4} + 2\cos\frac{A-B}{4}\sin\frac{A+B}{4} - \frac{1}{2} \le 0$$

Vế trái là tam thức bậc hai đối với $\sin\frac{A+B}{4}$ có $\Delta' = \cos^2\frac{A-B}{4} - 1 \le 0$ nên tam thức đồng dấu với (-2) tức là vế trái ≤ 0, vậy bất đẳng thức đã cho đúng.

Bài 176

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)$

Đ.H. An ninh (1997, A)

GIẢI

Theo bất đẳng thức Cô si, với 3 số

$\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)$, $\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)$ và $\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)$, ta có:

$$\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)\left(1+\sin\frac{C}{2}\right) \le \left(\frac{1+\sin\frac{A}{2}+1+\sin\frac{B}{2}+1+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3$$

$$\le \left(\frac{3+\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3$$

$$\le \left(\frac{3+\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

(Theo bài trên, ta có $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$)

Vậygiá trị lớn nhất của biểu thức là $\boxed{\frac{27}{8}}$

Bài 177

Tìm số k lớn nhất để bất phương trình sau được nghiệm đúng với mọi x. $k(|\sin x| + |\cos x| + 1) \le |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| + 2$

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (1996)

GIẢI

Đặt $t = |\sin x| + |\cos x|$ thì $t^2 = 1 + |\sin 2x|$ hay $|\sin 2x| = t^2 - 1$

Suy ra $1 \le t^2 \le 2$

Nên $1 \le t \le \sqrt{2}$

Do đó, bất phương trình cần chứng minh:

$$k(t+1) \le t^2 - 1 + t + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad k(t+1) \le t^2 + t + 1 \quad \text{với } 1 \le t \le \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad k \le \frac{t^2+t+1}{t+1} \quad \text{với } 1 \le t \le \sqrt{2}$$

k ở đây phải nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất của $\frac{t^2+t+1}{t+1}$, giá trị nhỏ nhất của $\frac{t^2+t+1}{t+1}$ với $t \in (1, \sqrt{2})$ là $\frac{3}{2}$

Vậy $k \le \frac{3}{2}$ và giá trị lớn nhất của $k = \frac{3}{2}$ thì bất phương trình đã cho đúng với mọi x.

Bài 178

Tìm nghiệm của phương trình $\sin^4x + \cos^4x = \cos2x$ thoả mãn bất phương trình: $1 + \log_{\frac{1}{2}}(2 + x - x^2) \geq 0$

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\sin^4x + \cos^4x = \cos2x$

$\Leftrightarrow \quad (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x\cos^2x = \cos2x$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos2x$

$\Leftrightarrow \quad 2 - \sin^2 2x - 2\cos2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 - (1 - \cos^2 2x) - 2\cos2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2 2x - 2\cos2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos2x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos2x = 1$

$\Rightarrow \quad 2x = 2k\pi$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = k\pi} \quad (k \in Z)$

Nghiệm x đó phải thoả mãn bất phương trình:

$$1 + \log_{\frac{1}{2}}(2 + x - x^2) \geq 0 \qquad (1)$$

Điều kiện: $(2 + x - x^2) > 0$ nên $-1 < x < 2$ (2)

Từ (1) ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(2 + x - x^2) \geq -1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$

Cơ số $\frac{1}{2} < 1$, hàm số logarit nghịch biến, do đó:

$$2 + x - x^2 \leq 2$$

$$-x^2 + x \leq 0 \quad \text{nên} \quad x \leq 0 \quad \text{hoặc } x \geq 1 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\begin{cases} -1 < x \leq 0 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Để nghiệm của phương trình $\sin^4x + \cos^4x = \cos2x$ thoả mãn (1), ta phải có: $-1 < x \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad -1 < k\pi \leq 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0$

Hoặc $1 \leq k\pi < 2 \Rightarrow$ không có số k nào thoả mãn bất đẳng thức này.

Vậy $\boxed{x = 0}$ là nghiệm số cần tìm.

Bài 179

Gọi A, B, C là ba góc tam giác. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là ta có hệ thức:

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C}=\sqrt{3}$$

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (1996)

GIẢI

Ta có hệ thức: $\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C}=\sqrt{3}$ (1)

- Điều kiện cần: tam giác ABC đều thì $A = B = C = 60^0$

  Vế trái khi đó là:

$$\frac{\cos 30^0}{1+\cos 60^0}+\frac{\cos 30^0}{1+\cos 60^0}+\frac{\cos 30^0}{1+\cos 60^0}=\sqrt{3}=\text{vế phải}$$

- Điều kiện đủ: Từ (1) ta suy ra: $\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{2\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{2\cos\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$

  Trong tam giác, ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos(A+B)$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\left[2\cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right)-1\right]$$

$$=-2\left[\cos^2\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]+1$$

$$=-2\left[\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right]+1$$

$$=1+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}-2\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2\le\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Và $\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2\le 3\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)$

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\sqrt{3}\sqrt{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$\le\sqrt{3}\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}}$$

$$\le \sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Do (2) dấu "=" xảy ra khi ABC là tam giác đều.

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\ge 3\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}}$$

Suy ra $\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)\ge 9$ (3)

Theo (2) và (3) thì

$$9\le\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\ge\frac{9.2}{3\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi ABC là tam giác đều

Bài 180

Cho phương trình lượng giác: $\cos 2x-(2m+1)\cos x=-m-1$

1. **Giải phương trình khi** $m=\frac{3}{2}$
2. **Tìm m để phương trình có nghiệm với** $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

Đ.H. Biên phòng (1996)

GIẢI

1. Thế $\cos 2x=2\cos^2x-1$ vào phương trình đã cho, ta có:

$2\cos^2x-1-(2m+1)\cos x=-m-1$

$\Leftrightarrow\quad 2\cos^2x-(2m+1)\cos x+m=0$ (1)

Khi $m = \frac{3}{2}$ ta có: $2\cos^2 x - 4\cos x + \frac{3}{2} = 0$

Giải phương trình, ta được: $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{(loại)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Suy ra: $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Đặt $t = \cos x$ Với $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $t \in (-1, 0)$

Phương trình (1) là: $2t^2 - (2m+1)t + m = 0$

Khi đó $f(t) = 2t^2 - (2m+1)t + m = 0$ phải có ít nhất một nghiệm $\in (-1\ 0)$).

- Có một nghiệm thuộc $(-1, 0)$ và một nghiệm ngoài $(-1, 0)$

  Khi đó: $f(-1).f(0) = 3(m+1).m < 0$

  suy ra: $\boxed{-1 < m < 0}$

- Có hai nghiệm cùng $\in (-1, 0)$, khi đó cần có điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta = (2m+1)^2 - 8m \geq 0 \\ 2.f(-1) > 0 \\ 2.f(0) > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{2m+1}{4} \in (-1,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 \geq 0 \\ m+1 > 0 \\ m > 0 \\ -4 < 2m+1 < 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

Vậy, để phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $-1 < m < 0$

Bài 181

Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC có:

$a\cot g\frac{C}{2} + b\cot g\frac{C}{2} = btgB + atgA$ thì ABC là tam giác cân

Đ.H. Biên phòng (1996)

GIẢI

Ta có: $a\cot g\frac{C}{2} + b\cot g\frac{C}{2} = btgB + atgA$

$\Leftrightarrow$ $atg\frac{A+B}{2} + btg\frac{A+B}{2} - btgB - atgA = 0$

$$\Leftrightarrow \qquad a\left(tg\frac{A+B}{2}-tgA\right)+b\left(tg\frac{A+B}{2}-tgB\right)=0 \qquad (1)$$

hế $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$ và tính

$\left(tg\frac{A+B}{2}-tgA\right)$; $\left(tg\frac{A+B}{2}-tgB\right)$ rồi rút gọn (1) ta có:

$$tgA\sin\frac{B-A}{2}+tgB\sin\frac{A-B}{2}=0$$

$$\sin\frac{A-B}{2}(tgB-tgA)=0$$

Với $\sin\frac{A-B}{2}=0$ ta suy ra $A = B$, do đó ABC là tam giác cân.

Với $tgB - tgA = 0$ ta suy ra $B=A$, do đó ABC là tam giác cân.

Bài 182

Giải phương trình: $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$

Đ.H. Cần Thơ (1996)

GIẢI

Ta có: $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$

Biến đổi vế phải: $3 - 4\cos^2 x = 3 - 4(1 - \sin^2 x)$

$= 4\sin^2 x - 1$

$= (2\sin x + 1)(2\sin x - 1)$

Phương trình đã cho thành:

$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = (2\sin x + 1)(2\sin x - 1)$

Chuyển vế và đặt $(2\sin x - 1)$ làm thừa số chung, ta có:

$(2\sin x - 1)(2\cos 2x) = 0$

Do đó: $2\sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \text{ có nghiệm: } \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}} \quad (k \in Z)$$

$$\cos 2x = 0 \text{ có nghiệm: } \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

Bài 183

Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn điều kiện:

$$3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

Đ.H. Cần Thơ (1996

GIẢI

Từ hệ thức đã cho: $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$

Ta viết lại thành: $(3\cos B + 4\sin B) + 2(3\sin C + 4\cos C) = 15$

Bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho biết $3\cos B + 4\sin B \le 15$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{\cos B}{3} = \frac{\sin B}{4}$ và $4\sin B + 3\cos B = 5$ (1)

Tương tự, ta có: $2(3\sin C + 4\cos C) \le 10$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{\sin C}{3} = \frac{\cos C}{4}$ và $3\sin C + 4\cos C = 5$ (2)

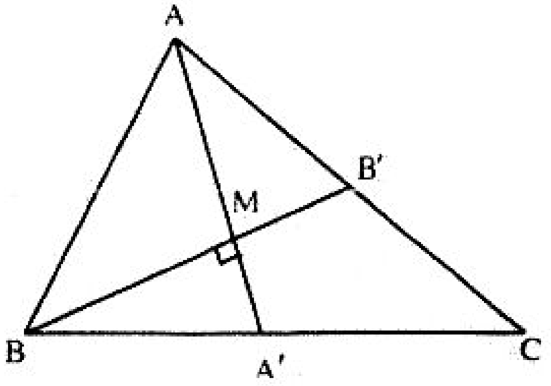
Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C = \frac{4}{3}$$

$$\left(B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$\Rightarrow B = \frac{\pi}{2} - C \Rightarrow$ góc B và C phụ nhau nên tam giác ABC vuông tại A.



Bài 184

Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến $AA' = m_a$; $BB' = m_b$; $CC' = m_c$.

a/ Tính diện tích S của tam giác theo m_a, m_b, m_c.

b/ Chứng minh rằng: $AA' \perp BB'$ khi và chỉ khi:

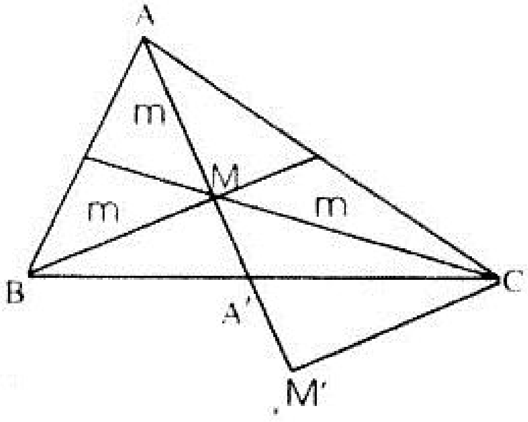
$$\operatorname{cotg} C = 2(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)$$

Đ.H. Dược Hà Nội (1996)

GIẢI

a/ Kéo dài trung tuyến AA' thêm đoạn A'M' = A'M, ta được tam giác CMM' có các cạnh:

$MM' = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}m_a$;



$BM = CM' = \frac{2}{3}m_b$; $CM = \frac{2}{3}m_c$

Như vậy, diện tích S' của tam giác CMM' có diện tích bằng nhau bằng $\frac{1}{3}$ diện tích ΔABC

Diện tích S' của tam giác CMM' là:

$$S' = \sqrt{\left[\frac{1}{3}(m_a+m_b+m_c).\frac{1}{3}(m_a+m_c-m_b)\frac{1}{3}(m_a+m_b-m_c).\frac{1}{3}(m_b+m_c-m_a)\right]}$$

Gọi S là diện tích tam giác ABC, ta có:

$$S=3S'=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_a+m_b-m_c)(m_b+m_c-m_a)}$$

b/ Do AA'⊥ BB' nên AMB là tam giác vuông có các cạnh

$$AB = c;\ BM^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2, \qquad AM^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2$$

Theo Pytago, trong tam giác vuông AMB ta có:

$$AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9}m_b^2 = c^2$$

$$4(m_a^2 + m_b^2) = 9c^2$$

$$4\left[\frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2} + \frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{2}\right] = 9c^2$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 9c^2$$

$$a^2 + b^2 = 5c^2$$

suy ra $a^2 + b^2 - c^2 = 4c^2$ (1)

Theo định lý hàm số cos ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ nên vế trái của phương trình $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$.

Theo định lý hàm số sin ta có: $a = 2R\sin A$

$b = 2R\sin B$

$c = 2R\sin C$

Do đó, từ (1) ta suy ra: $2ab\cos C = 4c^2$

$$8R^2\sin A.\sin B.\cos C = 16R^2\sin^2 C$$

$$\sin A.\sin B.\cos C = 2\sin^2 C$$

Hay $\dfrac{\cos C}{\sin C} = 2\dfrac{\sin C}{\sin A.\sin B}$

$$\Rightarrow \quad \cot g C = 2\frac{\sin(A+B)}{\sin A.\sin B}$$

$$= 2\frac{\sin A\cos B + \sin B\cos A}{\sin A.\sin B}$$

$$\Rightarrow \quad \cot g C = 2(\cot g A + \cot g B) \qquad (\text{dpcm})$$

Bài 185

Giải phương trình: $\boldsymbol{\cos^4 x + \sin^4 x + \dfrac{1}{\cos^4 x} + \dfrac{1}{\sin^4 x} = 8 + \dfrac{sn\,y}{2}}$

Đ.H. Dược Hà Nội (1996)

GIẢI

Ta có: $\cos^4 x + \sin^4 x + \dfrac{1}{\cos^4 x} + \dfrac{1}{\sin^4 x} = 8 + \dfrac{\sin y}{2}$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x\cos^4 x} = 8 + \frac{\sin y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{1}{16}\sin^4 2x}\right) = 8 + \frac{\sin y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{1}{16}\sin^4 2x\right) = 8 + \frac{\sin y}{2}$$

Do $1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \geq \dfrac{1}{2}$ và $1 + \dfrac{16}{\sin x} \geq 17$ nên vế trái $\geq \dfrac{17}{2}$

Vế phải $8 + \dfrac{\sin y}{2} \leq 8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$

Dấu "=" xảy ra thì 2 vế phải bằng $\dfrac{17}{2}$. Khi đó thì $\sin^2 2x = 1$ và siiny= 1.

- Với $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$ $(k \in Z)$
- Với $\sin y = 1$ suy ra $\boxed{y = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 186

Cho phương trình: $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$

1. Giải phương trình khi $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Đ.H. Đà Nẵng (1996)

GIẢI

1. Ta có: $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0 \quad (1)$

Khi m = 2, ta có: $\cos 2x - (\sqrt{2} + 1)\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (2\cos^2 x - 1) - (\sqrt{2} + 1)\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - (\sqrt{2} + 1)\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (2)$$

Giải (2) ta được: $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\ \boxed{\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}}\right. (k \in Z)$

2. Từ phương trình (1):

$$\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - 1 - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m = 0$$

Ta có:

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 8m \quad = (2m - 1)^2$$

Nghiệm số: $\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{2m + 1 + (2m - 1)}{4} = m \\ \cos x = \frac{2m + 1 - (2m - 1)}{4} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Để phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ thì cosx phải ở trong khoảng (–1, 0). Vậy điều kiện cần phải có là: $m \in (-1, 0)$

Bài 187

Tam giác ABC có các góc A, B, C với các cạnh đối diện có độ dài a, b, c tương ứng thoả mãn hệ thức: $\dfrac{1+\cos B}{\sin B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Đ.H. Huế (1996, A và B)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{1+\cos B}{\sin B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$

Bình phương 2 vế và áp dụng công thức nhân đôi, ta có:

$$\left(\frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)^2=\frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

Hay $\dfrac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}}=\dfrac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow 1+\cot g^2\dfrac{B}{2}=1+\dfrac{2a+c}{2a-c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{4a}{2a-c} \Leftrightarrow \quad 2a-c=2a(1-\cos B)$$

$$\Leftrightarrow \quad c=2a\cos B \quad \Rightarrow c^2=2ac\cos B$$

Theo định lý hàm số cos ta suy ra: $c^2=a^2+c^2-b^2 \Rightarrow a=b$.

Vậy ΔABC là tam giác cân.

Bài 188

Giải phương trình lượng giác: $\dfrac{\sin x(3\sqrt{2}-2\cos x)-2\sin^2 x-1}{1-\sin 2x}=1$

Đ.H. Huế (A, B chuyên ban 1996)

GIẢI

Điều kiện: $1-\sin 2x\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x\neq 1$ suy ra $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Do đó từ phương trình: $\dfrac{\sin x(3\sqrt{2} - 2\cos x) - 2\sin^2 x - 1}{1 - \sin 2x} = 1$

Ta suy ra: $3\sqrt{2}\sin x - \sin 2x - 2\sin^2 x - 1 = 1 - \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \sin x = \sqrt{2} & \text{(loại)} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \end{array}\right.$$

Với $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ có nghiệm $\boxed{x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

(còn một nghiệm trái với điều kiện bị loại)

Bài 189

Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ **và** $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. **Tính** $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$

Đ.H. Huế (1996, D)

GIẢI

Ta có: $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{tg\dfrac{\pi}{4} - tg\alpha}{1 + tg\dfrac{\pi}{4}tg\alpha} = \dfrac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$.

$$= \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{-\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}}{-\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}}$$

$$= \frac{-7}{-1} = 7$$

(Tính $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{-4}{5}$ (vì $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$))

Bài 190

Cho phương trình: $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$

a/ Giải phương trình khi $m = 4$

b/ Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm

Đ.H. Đông Đô (1996)

GIẢI

a/ Giải phương trình khi m = 4

Ta có: $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = 4$ (1)

Đặt $\cos x - \sin x = t$ $(|t| \le \sqrt{2})$

Suy ra: $\sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình (1) thành: $1 - t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 4t - 3 = 0$

Phương trình có nghiệm: $\left\{\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

- Với $t = 1$ thì $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Vậy các nghiệm của phương trình là: $\boxed{\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}}$ $(k \in \mathbb{Z})$

b/Ta có: $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$

Đặt $\cos x - \sin x = t$ $(|t| \le \sqrt{2})$ thì $\sin 2x = 1 - t^2$

Do đó phương trình trở thành: $1 - t^2 + 4t = m$

Phương trình có nghiệm thì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ suy ra:

$$\underset{(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2})}{\min f(t)} = -(4\sqrt{2} + 1) \le m \le 4\sqrt{2} - 1 = \underset{(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2})}{\max f(t)}$$

thì phương trình có nghiệm.

Bài 191

Chứng tỏ rằng nếu tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$\text{tg}A + \text{tg}B = 2\text{cotg}\frac{C}{2}$ thì tam giác đó cân.

Đ.H. Dân lập Đông đô (1997)

GIẢI

Điều kiện: $A, B \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

Biết $\text{tg}A + \text{tg}B = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$ và $\text{cotg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

Nên hệ thức đã cho là: $\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} = \dfrac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos A.\cos B} = \frac{2\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{C}{2} = 2\cos A.\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos C = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos C = -\cos C + \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B) = \cos 0^0 \text{ nên } A = B$$

Cách khác: $\text{tg}A + \text{tg}B = 2\text{cotg}\dfrac{C}{2} = 2\text{tg}\dfrac{A+B}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A - \text{tg}\frac{A+B}{2} = \text{tg}\frac{A+B}{2} - \text{tg}B$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\left(A - \frac{A+B}{2}\right)}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2} - B\right)}{\cos\frac{A+B}{2}.\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}.\cos B} \quad (\text{vì } \cos\frac{A+B}{2} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{(A-B)}{2}(\cos B - \cos A) = 0$$

$\Rightarrow$ Hoặc $\sin\dfrac{A-B}{2} = 0$ suy ra A=B. Hoặc cosB=cosA suy ra A=B.

Vậy tam giác cân tại C.

Bài 192

1. Cho tam giác ABC có độ dài AB = c ; BC = a ; AC = b thoả mãn điều kiện b + c = 2a. Chứng minh rằng: 2sinA = sinB + sinC

2. Giải phương trình: $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Đ.H. Giao thông, cơ sở II (1996)

GIẢI

1. Theo định lý hàm số sin ta suy ra: $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$

   Do đó: $b + c = 2a$

   $\Leftrightarrow \quad 2R(\sin B + \sin C) = 2.\ 2R\sin A$

   $\Leftrightarrow \quad \sin B + \sin C = 2\sin A$

2. Giải phương trình: $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin 2x + \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\cos 2x\right)^2 - 5 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(\sin 2x\sin\frac{\pi}{6} + \cos 2x\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-9}{8} = -1 \\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1+9}{8} = \frac{5}{4} > 1 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Với $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 = \cos\pi$

$$\Rightarrow \quad 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{7\pi}{12} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 193

Chứng minh: Nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn $\mathrm{tg}^6\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^6\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^6\frac{C}{2} = \frac{1}{9}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

Đ.H. Giao thông (1996)

GIẢI

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki:

$$(ab + bc + ca)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Ta suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

Với $a = tg^3\dfrac{A}{3}$; $b = tg^3\dfrac{B}{3}$ và $c = tg^3\dfrac{C}{3}$, ta có:

$$tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} \ge \left(tg^3\frac{A}{2}tg^3\frac{B}{2}\right) + \left(tg^3\frac{B}{2}tg^3\frac{C}{2}\right) + \left(tg^3\frac{C}{2}tg^3\frac{A}{2}\right)$$

$$\ge \left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^3 + \left(tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\right)^3 + \left(tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right)^3 \qquad (1)$$

Dấu "=" khi: $tg\dfrac{A}{2} = tg\dfrac{B}{2} = tg\dfrac{C}{2}$.

Ta cần chứng minh vế phải của (1) $\ge \dfrac{1}{9}$

Ta có: $$tg\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}} = \cot g\frac{C}{2} = \frac{1}{tg\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \qquad tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1$$

Do đó:

$$1 = \left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}\right)^2 \le 3\left(tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2} + tg^2\frac{C}{2}tg^2\frac{A}{2}\right).$$

Bình phương 2 vế, rút gọn ta có:

$$\frac{1}{9} \le \left(tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{B}{2}tg^2\frac{C}{2} + tg^2\frac{C}{2}tg^2\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{9} \le \left(\sqrt{tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}\sqrt{\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^3} + \sqrt{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}\sqrt{\left(tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\right)^3} + \sqrt{tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}}\sqrt{\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{CB}{2}\right)^3}\right)^2$$

$$= \left[\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^3 + \left(tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\right)^3 + \left(tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}\right)^3\right]$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\left(tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}\right)^3 = \left(tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}\right)^3 = \left(tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{C}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{9}$

Tức $tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2} = tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{C}{2} \Leftrightarrow tg\dfrac{A}{2} = tg\dfrac{B}{2} = tg\dfrac{C}{2}$

tức ΔABC đều.

Bài 194

Giải phương trình: $\sin^2x + \frac{1}{4}\sin^2 3x - \sin x\sin^2 3x = 0$

Đ.H. Hàng hải (1996)

GIẢI

Ta có: $\sin^2x + \frac{1}{4}\sin^2 3x - \sin x\sin^2 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x(1 - \sin^2 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2 3x\cos^2 3x = 0$$

Do đó: $\begin{cases}\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 3x = 0\\ \sin^2 3x\cos^2 3x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \frac{1}{2}\sin^2 3x\\ \frac{1}{4}\sin^2 6x = 0\end{cases}$

- Với $\sin 6x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{6}}$ $(k \in Z)$

  Ta chọn $k \in Z$ để $\sin\frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{3k\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{k\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin^2\frac{k\pi}{2} = \begin{cases}0 & \text{nếu } k = 2m\\ \frac{1}{2} & \text{nếu } k = 2m+1 \quad (m \in Z)\end{cases}$$

- Khi $k = 2m$ thì $\sin\frac{m\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow m = 3n \Rightarrow k = 6n \quad (n \in Z)$
- Khi $k = 2m + 1$ thì $\sin(2m + 1)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}(2m+1)\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi\\ (2m+1)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}k = 1 + 12n\\ k = 5 + 12n\end{array}\right.$$

Bài 195

Tam giác MNP có các góc thoả mãn điều kiện:

$$3(\cos N + 2\sin P) + 4(\sin N + 2\cos P) = 15$$

Chứng minh MNP là tam giác vuông.

Đ.H. Hàng hải (1996)

GIẢI

Hệ thức đã cho viết thành: $(3\cos N + 4\sin N) + (6\sin N + 8\cos P) = 15$

Biết $(3\cos N + 4\sin N)^2 \le (3^2 + 4^2)(\cos^2 N + \sin^2 N)$

$\le (9 + 16).1 = 25$

Nên $3\cos N + 4\sin N \le 5$ (1)

Tương tự ta có: $(6\cos P + 8\cos P)^2 \le (6^2 + 8^2)(\sin^2 P + \cos^2 P)$

$\le (36 + 64).1 = 100$

Nên $(6\sin P + 8\cos P) \le 10$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra vế trái của hệ thức đã cho ≤ 15.

Dấu "=" xảy ra khi: $3\cos N + 4\sin N = 5$

$\frac{\cos N}{3} = \frac{\sin N}{4}$ hay $\operatorname{tg} N = \frac{4}{3}$ (3)

và $6\sin P + 8\cos P = 10$

$\frac{\sin P}{6} = \frac{\cos P}{8}$ hay $\operatorname{tg} P = \frac{3}{4}$ (4)

So sánh (3) và (4) ta có: $\operatorname{tg} N = \frac{4}{3} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\operatorname{tg} P} = \operatorname{cotg} P$

Do đó, N và P là hai góc phụ nhau ($\operatorname{tg} N = \operatorname{cotg} P$) nên $N + P = 90^0$. Vậy tam giác MNP là tam giác vuông, vuông góc tại đỉnh M.

Bài 196

Giải phương trình: $\sqrt{5 - 3\sin^2 x - 4\cos x} = 1 - 2\cos x$

Đ.H. Hàng hải, cơ sở II (1996)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{5 - 3\sin^2 x - 4\cos x} = 1 - 2\cos x$ (1)

Điều kiện: $1 - 2\cos x \ge 0 \Rightarrow \cos x \le \frac{1}{2}$

Bình phương 2 vế của (1), ta có: $5 - 3\sin^2 x - 4\cos x = (1 - 2\cos x)^2$

$\Leftrightarrow 5 - 3(1 - \cos^2 x) - 4\cos x = 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2 + 3\cos^2 x = 1 + 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1$

Kết hợp với điều kiện $\cos x \le \frac{1}{2}$

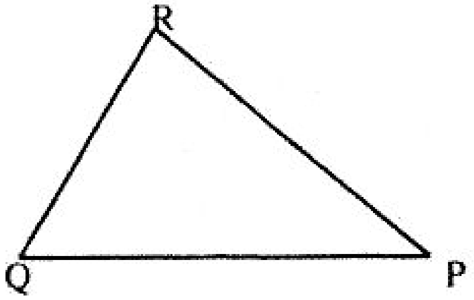
$\Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$, $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 197

Tam giác PQR có các góc P, Q, R theo thứ tự tạo thành cấp số nhân với công bội q = 2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{QR} = \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR}$

Đ.H. Hàng hải, cơ sở II (1996)

GIẢI



P, Q, R là cấp số nhân có công bội 2

nên $Q = 2P$, $R = 2Q = 4P$

Vì $P + Q + R = \pi$ suy ra:

$\hat{P} = \frac{\pi}{7}$; $\hat{Q} = \frac{2\pi}{7}$; $\hat{R} = \frac{4\pi}{7}$

Ta có:

$$\frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR} = \frac{1}{2R\sin R} + \frac{1}{2R\sin Q} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}\right)$$

$$= \frac{1}{2R}\left(\frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R}\left(\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}\right)$$

$$= \frac{1}{2R}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R\sin P} = \frac{1}{QR}$$

Bài 198

Tam giác ABC có các góc A, B, C, với các cạnh đối diện có độ dài a, b, c tương ứng thoả mãn hệ thức: $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

GIẢI

Ta có: $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ (1)

Bình phương 2 vế ta có:

$$\frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2\cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)^2 = \frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}} = 1+\frac{2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\cot g^2\frac{B}{2} = \frac{2a-c+2a+c}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{4a}{2a-c}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a-c = 4a\sin^2\frac{B}{2}$$

$$= 4a\left(\frac{1-\cos B}{2}\right)$$

$$2a-c = 2a-2a\cos B$$

$$c = 2a\cos B$$

Nhân 2 vế với c ta có: $c^2 = 2ac\cos B$.

Theo định lý hàm số cos ta có:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ mà

$b^2 = a^2 \Rightarrow b = a$ nên tam giác ABC cân

Bài 199

Giải phương trình:

$$\frac{(1-\cos x)^2+(1+\cos x)^2}{4(1-\sin x)} - tg^2x\sin x = \frac{1+\sin x}{2} + tg^2x$$

Đ.H. Kinh tế quốc dân (1996)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 1\end{cases}$ suy ra $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Từ phương trình đã cho, ta suy ra:

$$\frac{1-2\cos x+\cos^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{4(1-\sin x)}=\text{tg}^2x\sin x+\text{tg}^2x+\frac{1+\sin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2(1+\cos^2 x)}{4(1-\sin x)}=(1+\sin x)\left(\text{tg}^2x+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\cos^2 x=2(1-\sin^2 x)\left(\text{tg}^2x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\cos^2 x\left(\text{tg}^2x+\frac{1}{2}\right) \quad =2\sin^2 x+\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x=1 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\cos 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Nghiệm số: $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}$ $(k\in Z)$

Bài 200

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC và p là nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh rằng nếu $8(p-a)(p-b)(p-c)=abc$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

Đại học Kinh tế quốc dân (1996)

GIẢI

Ta có: $8(p-a)(p-b)(p-c)=abc$

hay $(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)=abc$

$\Leftrightarrow$ $(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)=abc$

$\Leftrightarrow$ $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=abc$

Ta có: $a^2\geq a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a+c-b)$ (1)

$b^2\geq b^2-(a-c)^2=(a+b-c)(b+c-a)$ (2)

$c^2\geq c^2-(a-b)^2=(c+a-b)(b+c-a)$ (3)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Nhân (1), (2), (3) vế với vế, ta được:

$$(abc)^2\geq(b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2$$

$$abc\geq(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

Dấu "=" xảy ra khi $b=c$, $a=c$, $a=b$ dẫn tới $a=b=c$ và tam giác ABC là tam giác đều.

Cách khác: Biết $p-a=\frac{b+c-a}{2}>0$

$$p-b=\frac{a+c-b}{2}>0$$

$$p-c=\frac{a+b-c}{2}>0$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{p-a+p-b}{2}=\frac{c}{2}\qquad(4)$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)}\le\frac{p-b+p-c}{2}=\frac{a}{2}\qquad(5)$$

$$\sqrt{(p-b)(p-a)}\le\frac{p-c+p-a}{2}=\frac{b}{2}\qquad(6)$$

Hai vế của các bất đẳng thức đều dương, nhân (4), (5) và (6) vế với vế, ta có: $(p-a)(p-b)(p-c)\le\frac{1}{8}abc$

Hay $8(p-a)(p-b)(p-c)\le abc$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $p-a=p-b=p-c$ suy ra $a=b=c$ và tam giác ABC là tam giác đều.

Chú ý: $p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{a+b+c-2a}{2}=\frac{b+c-a}{2}$

$$p-b=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+b+c-2b}{2}=\frac{a+c-b}{2}$$

2p là chu vi tam giác, $2p=a+b+c$.

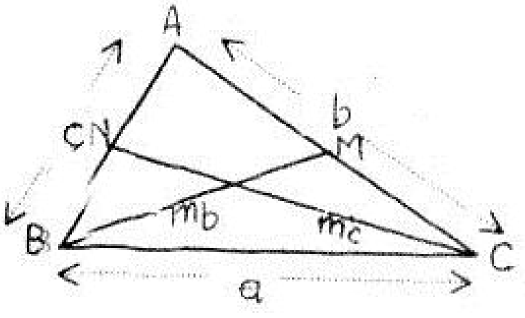
Bài 201

Cho tam giác ABC có AB= c ; AC =b và các trung tuyến BM=m_b ; CN = m_c thoả mãn: $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}\neq 1$. Chứng minh rằng:

$$2\text{cotg}A=\text{cotg}B+\text{cotg}C$$

Đ.H. Kiến trúc Hà Nội (1996)

GIẢI



Ta có: $\frac{c}{b}=\frac{m_b}{m_c}\neq 1$

Nên $\frac{c^2}{b^2}=\frac{m_b^2}{m_c^2}\qquad(1)$

Độ dài trung tuyến m_b và m_c trong tam giác ABC tính theo công thức:

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{2} \quad ; \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}}{2}$$

Lập tỷ số $\frac{m_b^2}{m_c^2} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2(a^2 + b^2) - c^2}$, nhưng $\frac{m_b^2}{m_c^2} = \frac{c^2}{b^2}$

Nên ta có: $\frac{c^2}{b^2} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{2(a^2 + b^2) - c^2}$

$\Leftrightarrow \quad 2c^2(a^2 + b^2) - c^4 = 2b^2(a^2 + c^2) - b^4$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2b^2a^2 + 2b^2c^2 - b^4$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2(c^2 - b^2) - (c^4 - b^4) = 0$

$(c^2 - b^2)(2a^2 - (c^2 + b^2)) = 0$

Vì $c^2 - b^2 \neq 0$ nên: $2a^2 = b^2 + c^2$ hay $a^2 = b^2 + c^2 - a^2$ (2)

Theo định lý hàm số cos ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (3)

Từ (2) và (3) ta có hệ thức: $a^2 = 2bc\cos A$

$$\sin^2 A = 2\sin B\sin C\cos A$$

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{2\cos A}{\sin A} = 2\,\text{cotg}A$$

Vế trái:

$$\frac{\sin A}{\sin B\sin C} = \frac{\sin(B + C)}{\sin B\sin C} = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B\sin C} = \text{cotg}B + \text{cotg}C$$

Do đó: $2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C$

ĐỀ THI NĂM 1997

Bài 202

Giải phương trình: $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$

Đ.H. An ninh (1997, A)

GIẢI

áp dụng: $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}$

Vế trái: $\cos 2x - \cos 4x = 2\sin 3x\sin x$

Nên $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4\sin^2 3x\sin^2 x$

Suy ra: $4\sin^2 3x\sin^2 x \leq 4$

Còn vế phải: $6 + 2\sin 3x = 4 + 2(1 + \sin 3x) \geq 4$

Dấu "=" khi: $\begin{cases} \sin^2 3x\,\sin^2 x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$ Hay $\begin{cases} \sin x = \pm 1 \\ \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = -1 \end{cases}$

Giải ra, ta được $\sin x = 1$ nên $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 203

Giải phương trình: $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$

Đ.H. An ninh (1997, C)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{1 + \sin x} = -\cos x$ (1)

Do $1 + \sin x \geq 0$ nên $-\cos x \geq 0$ hay $\cos x \leq 0$

Từ (1) ta có: $1 + \sin x = \cos^2 x$

$= 1 - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \quad \sin x + \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x(1 + \sin x) = 0$

Suy ra $\sin x = 0$ và $x = k\pi$

$\sin x = -1$ và $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Kết hợp với điều kiện $\cos x \leq 0$ ta được các nghiệm $\begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

Bài 204

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$$

Đ.H. An ninh (1997, C)

GIẢI

Biết $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

Suy ra $\cos^3 A = \frac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A)$

Tương tự: $\cos^3 B = \frac{1}{4}(3\cos B + \cos 3B)$

$$\cos^3 C = \frac{1}{4}(3\cos C + \cos 3C)$$

$$\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C = \frac{3}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)+\frac{1}{4}(\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C)$$

Theo bài ra, ta cần chứng minh:

$$\frac{3}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{1}{4}(\cos 3A+ \cos 3B + \cos 3C) \le$$

$$\le \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$$

Hay $\frac{3}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) \le \frac{9}{8}$

$\Leftrightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$$

Suy ra: $4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} \ge 0$ luôn đúng

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi: $\begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2} \end{cases}$

Từ đó suy ra A = B và $\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ hay $C = 60^0$

Dấu "=" xảy ra khi ABC là tam giác đều.

Bài 205

Giải phương trình lượng giác: $\left(\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$

Đ.H. Bách khoa Hà Nộ

GIẢI

Điều kiện: $\cos x \ge 0$ suy ra $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Ta có: $\left(\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x}\right)\cos 2x = \frac{1}{2}2\sin 2x\cos 2x$

hay $\cos 2x\left(\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x}-\sin 2x\right)=0$

1) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{4}+k\pi$ (1)

Vì cosx ≥ 0 nên k ở (1) phải là số chẵn k = 2n

Vậy: $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{4}+2n\pi}$ $(n \in Z)$

2) $\left(\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x}\right) = \sin 2x$ (2)

Vế trái của (2) ≥ 0 nên sin2x ≥ 0

Bình phương 2 vế của (2) ta có:

$1 + 2\sqrt{(1-\cos x)\cos x} = \sin^2 2x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(1-\cos x)\cos x} = \sin^2 x - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{(1-\cos x)\cos x} = -\cos^2 2x$ (*)

Ta có vế trái ≥ 0, vế phải ≤ 0 nên dấu "=" chỉ xảy ra khi vế trái = vế phải = 0

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x = 1 \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos^2 x - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \text{hệ PT vô nghiệm}$$

⇒ Phương trình (*) vô nghiệm.

Bài 206

Cho tam giác ABC có 3 góc thoả mãn điều kiện A >B >C. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}} + \sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}} - 1$

Từ đó suy ra phương trình sau chỉ có một nghiệm

$$\sqrt{x-\sin A} + \sqrt{x-\sin B} = \sqrt{x-\sin C}$$

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (1997)

GIẢI

Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}} + \sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}} - 1$

A, B, C là ba góc của tam giác nên A > B > C thì a > b > c

Hay $2R\sin A > 2R\sin B > 2R\sin C$

$$\sin A > \sin B > \sin C$$

Hàm số f(x) xác định khi $x \neq \sin C$; $x < \sin C$ hay $x \geq \sin A$ $\forall x$

Tính đạo hàm f'(x):

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}\right)' + \left(\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}\right)'$$

$$= \frac{\left(\frac{x-\sin A}{x-\sin C}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}}} + \frac{\left(\frac{x-\sin B}{x-\sin C}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}}}$$

$$= \frac{(x-\sin C)-(x-\sin A)}{2(x-\sin C)^2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin A}} + \frac{(x-\sin C)-(x-\sin B)}{2(x-\sin C)^2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin B}}$$

$$= \frac{\sin A-\sin C}{2(x-\sin C)^2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin A}} + \frac{\sin B-\sin C}{2(x-\sin C)^2}\sqrt{\frac{x-\sin C}{x-\sin B}} > 0$$

(Do $\sin A > \sin B > \sin C$)

Ta lập bảng biến thiên của f(x):

x	$-\infty$		$\sin C$		$\sin A$		$+\infty$
f'(x)		+	‖		‖	+	
f(x)	1	↗	$+\infty$ ‖	▨	$\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}}-1$	↗	1

Vậy giá trị nhỏ nhất của f(x) là $\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}} - 1$

* Phương trình: $\sqrt{x-\sin A} + \sqrt{x-\sin B} = \sqrt{x-\sin C}$ có $x \geq \sin A$

Chia 2 vế cho $x - \sin C > 0$ ta có: $\sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}} + \sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}} = 1$

Xét $f(x) = \sqrt{\frac{x-\sin A}{x-\sin C}} + \sqrt{\frac{x-\sin B}{x-\sin C}} - 1 = 0$ với điều kiện $x \geq \sin A$

Trong $[\sin A, +\infty)$ hàm số f(x) có giá trị nhỏ nhất bằng

$$\sqrt{\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}}-1<0 \text{ (vì } 0<\sin A-\sin B<\sin A-\sin C)$$

Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ liên tục và có $f'(x)>0$

⇔ Hàm đồng biến trên $[\sin A + \infty)$

Vậy phương trình đã cho trong khoảng $[\sin A, +\infty)$ chỉ có một nghiệm số duy nhất.

Cách khác: Khi $x<\sin C$ ta biến đổi f(x):

$$f(x)=\sqrt{\frac{\sin A-x}{\sin C-x}}+\sqrt{\frac{\sin B-x}{\sin C-x}}-1>1+1-1=1$$

Khi $x\ge\sin A$ thì $x-\sin A<x-\sin B$

Đặt $x-\sin A=p$; $x-\sin B=q$ thì $\dfrac{x-\sin A}{x-\sin B}=\dfrac{p}{q}$

$\dfrac{p}{q}$ ở đây < 1 (p, q > 0), với số $0<k<q$ ta có: $\dfrac{p}{q}\ge\dfrac{p-k}{q-k}$

Với $p=x-\sin B$
$q=x-\sin C$
$k=x-\sin A$

Ta có: $$\frac{x-\sin B}{x-\sin C}\ge\frac{x-\sin B-(x-\sin A)}{x-\sin C-(x-\sin A)}$$

$$\ge\frac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}$$ Dấu "=" xảy ra khi $x=\sin A$

Vậy giá trị nhỏ nhất của f(x) bằng $\sqrt{\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A-\sin C}}-1$ đạt được khi $x=\sin A$.

Bài 207

Tìm các giá trị của $x\in(0, 2\pi)$ sao cho:

$$\mathbf{\cos x-\sin x-\cos 2x>0}$$

GIẢI

Ta có: $\cos x-\sin x-\cos 2x>0$

⇔ $\cos x-\sin x-(\cos^2x-\sin^2x)>0$

⇔ $(\cos x-\sin x)-(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)>0$

⇔ $(\cos x-\sin x)(1-(\cos x+\sin x))>0$

⇔ $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left[1-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]>0$

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4}$ ta được $\sqrt{2}\cos t(1 - \sqrt{2}\sin t) > 0$

Suy ra: $\begin{cases} \cos t > 0 \\ \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi < t < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{4} + k2\pi < x < k2\pi \quad (k \in Z)$$

Hoặc: $\begin{cases} \cos t < 0 \\ \sin t > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k2\pi < t < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + k2\pi$$

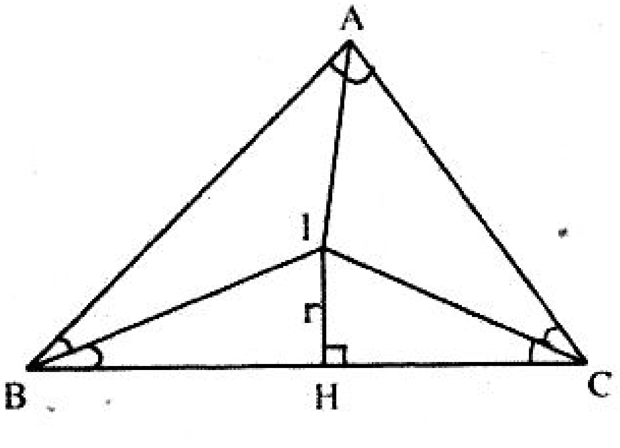
$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z)$$

Bài 208

I, r tương ứng là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, BIC, CIA, AIB. Chứng minh $R_1.R_2.R_3 = 2rR^3$.

Đ.H. Dược Hà Nội (1997)

GIẢI



Ta có: $\widehat{BIC} = \pi - \left(\frac{B+C}{2}\right)$

$$\sin\widehat{BIC} = \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

Theo định lý hàm số sin, trong tam giác BIC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}} = 2R_1$$

Suy ra

$$R_1 = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} = 2R\sin\frac{A}{2}$$

Tương tự, từ các tam giác CIA và AIB, ta có:

$$R_2 = \frac{b}{2\cos\frac{B}{2}} = \frac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\cos\frac{B}{2}} = 2R\sin\frac{B}{2}$$

$$R_3 = \frac{c}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{C}{2}} = 2R\sin\frac{C}{2}$$

Do đó: $R_1.R_2.R_3 = 8R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$ (1)

Trong tam giác BIC ta có:

$$a = BC = 2R\sin A = BH + CH = r\cot g\frac{B}{2} + r\cot g\frac{C}{2}$$

$$= r\left(\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}\right) = r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = r\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Thế r vào (1) ta được: $R_1.R_2.R_3 = 2rR^2$

Bài 209

Giải phương trình: $\mathbf{\sin 3x + 2\cos 2x - 2 = 0}$

Đ.H. Đà Nẵng

GIẢI

Biết $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Nên ta có: $\sin 3x + 2\cos 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin x - 4\sin^3 x + 2(\cos 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\sin x - 4\sin^3 x - 4\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x(4\sin^2 x + 4\sin x - 3) = 0$

Suy ra: $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi\ (k \in Z)$

$4\sin^2x + 4\sin x - 3 = 0$ có các nghiệm $\left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{3}{2} \qquad (\text{loại})\\[2mm] \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $\sin x = \dfrac{1}{2}$ ta có các nghiệm: $\left[\boxed{\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\\[2mm] x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\end{array}}\right. \quad (k \in Z)$

Bài 210

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và các góc A, B, C, giả thiết $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B.\sin C}$. Chứng minh ΔABC vuông.

GIẢI

Theo định lý hàm số sin ta có: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ và $c = 2R\sin C$.

Do đó: $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B.\sin C}$

Suy ra: $$\frac{2R\sin B}{\cos B} + \frac{2R\sin C}{\cos C} = \frac{2R\sin A}{\sin B.\sin C} \qquad (1)$$

Vế trái:

$$\frac{2R(\sin B\cos C + \sin C\cos B)}{\cos B.\cos C} = \frac{2R(\sin(B + C))}{\cos B.\cos C} = \frac{2R\sin A}{\cos B.\cos C} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\cos B\cos C = \sin B.\sin C$

$\Leftrightarrow \quad \cos B\cos C - \sin B\sin C = \cos(B + C) = 0$

Nên $(B + C) = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$. Do đó ABC là tam giác vuông góc tại A.

Bài 211

Giải phương trình: $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$

Đ.H. Đà Nẵng (1997, B)

GIẢI

Ta có: $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x\sin x + 2\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin x(\cos 2x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin x(2\cos^2x + \cos x - 1)) = 0$

Giải ra, ta được $\sin x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$

$\cos x = -1$ có nghiệm $\boxed{x = \pi + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ có nghiệm $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ $k \in Z)$

Bài 212

Trong tam giác ABC, chứng minh luôn luôn có:

$$\cos A + \cos B + \cos C > 1$$

GIẢI

áp dụng công thức cộng cung:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

Ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(\frac{-B}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$$

Vậy trong mọi tam giác ta có $\cos A + \cos B + \cos C > 1$.

Bài 213

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c

Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

GIẢI

a, b, c là 3 cạnh tam giác nên ta có:

$|a - b| < c$

$\Leftrightarrow \quad (a - b)^2 < c^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 < c^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 < 2ab \qquad (1)$

Tương tự, ta có:

$$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc \qquad (2)$$
$$a^2 + c^2 - b^2 < 2ac \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Bài 214

Tính: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}$

GIẢI

Ta có: $\dfrac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = \dfrac{\sin^2 2x}{x \sin x}$

$$= \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin x}$$

$$= \frac{2 \sin 2x}{2x} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x}$$

$$= 2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right) 2 \cos x$$

- Biết $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ nên $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$ và $\cos 0^0 = 1$

Do đó: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = 2.1.2 = 4.$

Bài 215

Cho tam giác ABC bất kỳ. Chứng minh rằng ta có đẳng thức

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2} = 1$$

Đ.H. Công đoàn (1997)

GIẢI

Trong tam giác ta có: $\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) + \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2}$

Nên $\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2} = \cot g \dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}}{1 - \mathrm{tg}\frac{A}{2}.\mathrm{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{C}{2}}$$

Suy ra: $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$

Hay $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$

Vậy $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$

Bài 216

Giải phương trình lượng giác: $\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x$

Đ.H. Công đoàn (1997)

GIẢI

Điều kện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

Ta có: $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$

Do đó: $\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)=\frac{2}{\sin 2x}$ (1)

$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\sin 2x=2$ suy ra: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x=1$

Ta có 2 hệ phương trình: $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin 2x=1\end{cases}$

Và $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\\ \sin 2x=-1\end{cases}$

Giải ra, ta được các nghiệm: $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+2k\pi}$ $(k\in Z)$

Cách khác Từ (1) ta có: $\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$ (2)

Đặt $\sin x+\cos x=t$

Suy ra $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

Từ (2) ta có: $\frac{\sqrt{2}t.(t^2-1)}{2}=1$

$$\sqrt{2}\,t^3 - \sqrt{2}\,t - 2 = 0$$

$$t^3 - t - \sqrt{2} = 0$$

$$(t - \sqrt{2})(t^2 + \sqrt{2}\,t + 1) = 0$$

Suy ra: $t = \sqrt{2} = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos 0^0$$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Còn $t^2 + \sqrt{2}\,t + 1 > 0$ vì biệt số $\Delta = -2 < 0$.

Bài 217

Tìm: $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

Đại học Giao thông

GIẢI

Ta có: $\left|x\cos\frac{1}{x}\right| \geq 0$

$$|x|\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0 \quad \text{khi} \quad x \to 0$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

Bài 218

Cho $y = \sin^2 5x$. **Tính đạo hàm** $y^{(n)}$.

Đ.H. Giao thông (1997)

GIẢI

Biết $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Nên $y = \sin^2 5x = \frac{1-\cos 10x}{2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Đạo hàm bậc nhất: $y' = \frac{1}{2}\left[\sin\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \frac{1}{2}\left[10\cos\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}.10\sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.10\sin(\pi - 10x)$$

$$= -\frac{1}{2}.10\sin(10x - \pi)$$

Đạo hàm bậc hai: $y'' = -\frac{1}{2}.10[\sin(10x - \pi)]' = -\frac{1}{2}.10^2\cos(10x - \pi)$

$$= -\frac{1}{2}.10^2\sin\left[\frac{\pi}{2} - (10x - \pi)\right] = -\frac{1}{2}.10^2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 10x\right)$$

$$= \frac{+1}{2}.10^2\sin\left(10x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Đạo hàm bậc ba: $y''' = \frac{1}{2}.10^3\cos\left(10x - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}.10^3\sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(10x - \frac{3\pi}{2}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}.10^3\sin\left(\frac{4\pi}{2} - 10x\right) \qquad = -\frac{1}{2}.10^3\sin\left(10x - \frac{4\pi}{2}\right)$$

Suy ra: $\boxed{y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2}10^n\sin\left(10x - \frac{n+1}{2}\pi\right)}$

Bài 2.19

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 1 + \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$$

Đ.H. Giao thông (1997, đề 2)

GIẢI

Ta có: $y = 1 + \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$

$\Leftrightarrow \quad y - 1 = \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$

$\Leftrightarrow \quad (y - 1)(2 + \cos x) = 3\sin x$

$\Leftrightarrow \quad (y - 1)\cos x - 3\sin x = 2(1 - y)$

Vế trái, theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta có:

$$\left[(y-1)\cos x - 3\sin x\right]^2 \le \left[(y-1)^2 + (-3)^2\right](\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[2(1-y)\right]^2 \le y^2 - 2y + 1 + 9$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 - 8y + 4y^2 \le y^2 - 2y + 10$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2y - 2 \le 0$$

Do đó suy ra: $1 - \sqrt{3} \le y \le 1 + \sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\boxed{1+\sqrt{3}}$ và

giá trị nhỏ nhất của y là $\boxed{1-\sqrt{3}}$

Bài 220

Giải phương trình: $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{3}{2}\sin 4x$

Đ.H. Giao thông (1997., đề 2)

GIẢI

Đặt $t = \sin 2x + \cos 2x \qquad (|t| \le \sqrt{2})$

$$= \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Khi đó $t^2 = \sin^2 2x + \cos^2 2x + 2\sin 2x\cos 2x$

suy ra $\sin 2x\cos 2x = \frac{t^2-1}{2}$

$$\frac{1}{2}\sin 4x = \frac{t^2-1}{2} \qquad (1)$$

Ta có:

$(\sin 2x + \cos 2x)^3 = \sin^3 2x + \cos^3 2x + 3\sin 2x\cos 2x(\sin 2x + \cos 2x)$

$$t^3 = \sin^3 2x + \cos^3 2x + 3\,\frac{t^2-1}{2}.t$$

Suy ra: $\sin^3 2x + \cos^3 2x = t^3 - 3\,\frac{t^2-1}{2}\,t \qquad (2)$

Thế sin4x và $\sin^3 2x + \cos^3 2x$ ở (1) và (2) vào phương trình đã cho, ta được: $1 + t^3 - \frac{3(t^2-1)t}{2} = \frac{3}{2}(t^2-1)$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + 2t^3 - 3t^3 + 3t = 3t^2 - 3$$
$$\Leftrightarrow \quad t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (t+1)(t^2+2t-5)=0$

Với $t + 1 = 0$, suy ra $t = -1$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 2x-\frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4}+2k\pi$$

- Với $2x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2}+k\pi} \quad (k \in Z)$

- Với $2x = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4}+k\pi} \quad (k \in Z)$

Với $t^2 + 2t - 5 = 0$

Giả ra, ta được: $\begin{cases} t = -1+\sqrt{6} > \sqrt{2} & \text{(loại)} \\ t = -1-\sqrt{6} < -\sqrt{2} & \text{(loại)} \end{cases}$

Bài 221

Gải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos^2 x + \sin^2 y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

Đ.H. Hàng hải

GIẢI

Đặt $\sin x = u \quad (-1 \le u \le 1)$

$\cos y = v \quad (-1 \le v \le 1)$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u + v = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ u^2 + v^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

$(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + 2uv \quad \Leftrightarrow \quad uv = 0$$

Do đó ta có hệ: $\begin{cases} u + v = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ uv = 0 \end{cases}$

Giải hệ này, ta được: $u_1 = 0$ suy ra $\boxed{x = k\pi}$

$v_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $\boxed{y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2n\pi}$

Với $u_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ thì $\boxed{x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi}$ và $\boxed{x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi}$

$v_2 = 0$ thì $\boxed{y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi}$ $(k, n \in \mathbb{Z})$

Bài 222

Tính: $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$$

Đ.H. Hàng hải (1997)

GIẢI

Điều kiện $x \geq 0$ để $\sqrt{x}$ có nghĩa, do đó: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$ không tồn tại.

Với $x \geq 0$ ta có: $$\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}} = \frac{1 - \cos x}{\left(1 - \cos\sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{\cos x}\right)}$$

$$= \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(1 + \sqrt{\cos x}\right)} = \frac{x}{1 + \sqrt{\cos x}}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2}$$

Do đó: $$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}} = 0}$$

Bài 223

Giải phương trình: $\cos x = \cos^2\left(\dfrac{3x}{4}\right)$

Đ.H. Hàng hải (1997, chưa phân ban)

GIẢI

Biết $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ và $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Nên $\cos^2\left(\dfrac{3x}{4}\right) = \dfrac{1+\cos\dfrac{3x}{2}}{2}$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

Do đó phương trình đã cho: $2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1 = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{3x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 1 + \cos 3\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\cos^3\left(\frac{x}{2}\right) - 3\cos\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3\left(\frac{x}{2}\right) - 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 3\right) = 0$$

- Với $\cos\dfrac{x}{2} - 1 = 0$ suy ra $\cos\dfrac{x}{2} = 1 = \cos 0^0$

có nghiệm $\boxed{x = 4k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $4\cos^2\dfrac{x}{2} - 3 = 0$ suy ra: $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\cos x}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Ghi chú: Phương trình (1) có dạng a + b + c + d = 0 có một nghiệm có giá trị bằng 1.

Bài 224

Giải phương trình: tgx + cotgx = 4

Đ.H. An ninh – Đ.H. Cảnh sát (1997, A)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases}$ Suy ra $\sin 2x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq k\frac{\pi}{2}$

Phương trình đã cho tương đương: $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x.\sin x} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 4\sin x\cos x = 2\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{array}\right.$

Các nghiệm số là: $\left[\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$

Bài 225

Giải phương trình lượng giác: $\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0$

Bưu chính – Viễn thông II (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x(\cos x - 4\sin x) = 0$

Do đó: $\cos x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

$\cos x - 4\sin x = 0$

suy ra $\text{tg}x = \frac{1}{4}$ có nghiệm $\boxed{x = \text{arctg}\frac{1}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 226

Tìm các giá trị của x sao cho đạo hàm của hàm số:

$$y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x \text{ bằng không}$$

T.T. Bưu chính Viễn thông

GIẢI

Ta có: $y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x$

Đạo hàm: $y' = 4 - 2\cos 2x - 4\sqrt{2}\sin x \;= 4 - 2(1 - 2\sin^2 x) - 4\sqrt{2}\sin x$

$$= 2(2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1) \;= 2(\sqrt{2}\sin x - 1)^2$$

Khi $y' = 0$, ta có: $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}}\right. (k \in Z)$$

Bài 227

Các góc tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A\sin B\sin C$$

Chứng minh ΔABC đều.

T.T. Bưu chính Viễn thông

GIẢI

Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = 4\sin A\sin B\sin C$

Biến đổi vế trái, ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Vế phải:

$$4\sin A\sin B\sin C = 4\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Do đó (1) trở thành:

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Hay $\qquad 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1 \qquad (2)$

Theo công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

suy ra vế trái của (2) là:

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$= -4\sin^2\frac{C}{2} + 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Khi đó, từ (2) ta có: $\quad -4\sin^2\frac{C}{2} + 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow \qquad 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + 1 - \cos^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 & (3) \\ 2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2} = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (3) ta suy ra A = B. Thế $\cos\frac{A-B}{2} = \cos 0^0 = 1$ vào (4) ta được: $\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ suy ra $C = 60^0$

Vậy ΔABC là tam giác đều.

Bài 228

Giải phương trình lượng giác: $\cos^6x + \sin^2x = 1$

Bưu chính Viễn thông II (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos^6x + \sin^2x = 1$

$\Leftrightarrow (\cos^2x)^3 + \sin^2x = 1$

$\Leftrightarrow (1 - \sin^2x)^3 + \sin^2x = 1$

Đặt $t = \sin^2x$; $0 \le t \le 1$

Ta có phương trình: $(1 - t)^3 + t = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 3t + 3t^2 - t^3 + t = 1$

$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 2t = 0$

$\Leftrightarrow t(t^2 - 3t + 2) = 0$

Do đó: $t = 0 \Rightarrow \sin^2x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$

Có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$ (1) $k \in Z$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

Suy ra: $t_1 = 1$

$t_2 = 2$ (loại)

Với $t_1 = 1 = \sin^2x$

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 = \cos\pi$

$\Rightarrow 2x = \pi + 2k\pi$

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có nghiệm $\boxed{x = \dfrac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

Bài 229

Giải phương trình: $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$

Đ.H. Huế (1997, D, phân ban)

GIẢI

Điều kiện: $1 - \sin x \ne 0$ suy ra $x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\cos x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$$
$$= (1 - \sin^2 x) = \cos^2 x$$
$$\cos x(1 - \cos x) = 0$$

Với $\cos x = 0$ kết hợp điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi}$ $(k \in Z)$

Với $\cos x = 1$ ta có nghiệm $\boxed{x = 2k'\pi}$ $(k' \in Z)$

Bài 230

Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0$

Đ.H. Huế (1997, D, chưa phân ban)

GIẢI

Điều kiện: $1 + \sin x \neq 0$ suy ra $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Ta có: $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin 2x + 2\cos x + 2\sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow$ $2(\sin 2x + \cos x) = 0$

Suy ra: $\cos x = -\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 2k\pi$$

Với $x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi$ thì $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi$ (loại)

Với $x = -\frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi$ thì $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k'\pi}{3}}$ $(k' \in Z)$

Bài 231

Giải phương trình: $2\cos^3 x = \sin 3x$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1997)

GIẢI

Ta có: $2\cos^3 x = \sin 3x$ (1)

$\Leftrightarrow$ $2\cos^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Xét $\cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ thì $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Khi đó thì vế trái của (1) bằng 0, vế phải bằng 1, VT ≠ VP

$\Rightarrow \cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1)

$\Rightarrow \cos x \neq 0$

Chia 2 vế của (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta có:

$$\Rightarrow \quad 2 = \frac{3\sin x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 4tg^3x$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 3tgx(1 + tg^2x) - 4tg^3x$$

$$\Rightarrow \quad tg^3x - 3tgx + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (tgx - 1)^2(tgx + 2) = 0$$

Với $tgx - 1 = 0$, ta có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Với $tgx + 2 = 0$, ta có nghiệm $\boxed{x = arctg(-2) + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 232

Cho tam giác ABC có cạnh a, b, c và l_a, l_b, l_c là độ dài các đường phân giác trong tương ứng với các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{c}(l_a + l_b) + \frac{1}{b}(l_a + l_c) + \frac{1}{c}(l_b + l_c) \leq 3\sqrt{3}$$

Học viện Kỹ thuật quân sự (1997)

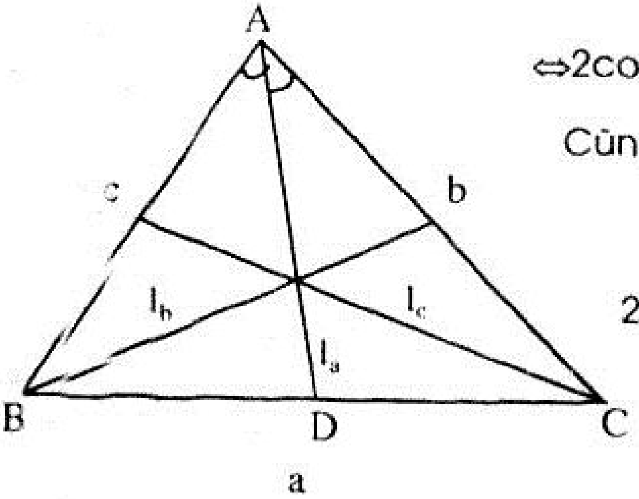
GIẢI

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = l_a\sin\frac{A}{2}(b + c)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2} = l_a\left(\frac{b+c}{bc}\right) = l_a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \qquad (1)$$



Cũng chứng minh tương tự, ta suy ra:

$$2\cos\frac{B}{2} = l_b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \qquad (2)$$

$$2\cos\frac{C}{2} = l_c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)=l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+l_b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{c}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_a+l_c)+\frac{1}{a}(l_b+l_c)\le 3\sqrt{3}$$

Do đó, ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

Đặt $T=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$T+\cos\frac{\pi}{6}=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{A-B}{4}+2\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\le 2\left(\cos\frac{A+B}{4}+\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$=2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}-\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)$$

$$\le 2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\right)=4\cos\frac{\pi}{6}$$

Suy ra: $T+\cos\frac{\pi}{6}\le 4\cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad T \le 3\cos\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \quad T \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Do đó: $\frac{1}{c}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_a+l_c)+\frac{1}{a}(l_b+l_c)\le 3\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi ABC là tam giác đều.

Bài 233

Giải phương trình: $\log_{\frac{6x-x^2}{10}}(\sin 3x+\sin x)=\log_{\frac{6x-x^2}{10}}(\sin 2x)$

Học viện khoa học quân sự

GIẢI

Ta có: $\log_{\frac{6x-x^2}{10}}(\sin 3x+\sin x)=\log_{\frac{6x-x^2}{10}}(\sin 2x)$ (1)

ĐK: $$\begin{array}{l}0<\frac{6x-x^2}{10}\neq 1\\ \sin 2x>0\\ \sin 3x+\sin x>0\end{array}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<6\\ \sin 2x>0\\ 2\sin 2x\cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<6\\ \sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<6\\ k2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}$$

Từ (1) ta có: $\sin 3x+\sin x=\sin 2x$

$\Leftrightarrow\ 2\sin 2x\cos x=\sin 2x$ (3)

$\Leftrightarrow\ \sin 2x(2\cos x-1)=0$

Do $\sin 2x>0$ nên $2\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow\ \cos x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ (4)

Chỉ lấy được các nghiệm của (3) thoả mãn (2) và (3).

Từ $\sin 2x>0$ ta suy ra $2\sin x\cos x>0$ túc là $\sin x$ và $\cos x$ phải cùng dấu nghĩa là cung x phải thuộc phần tư I và IV nên chỉ có nghiệm $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ là nhân được.

Nhưng với điều kiện $0<x<6$ ta lại phải có: $0<\frac{\pi}{3}+2k\pi<6$

Suy ra chỉ nhận được $k=0$ nên $x=\frac{\pi}{3}$

Vậy phương trình (1) chỉ có một nghiệm: $\boxed{x=\frac{\pi}{3}}$

Bài 234

Giải phương trình: $$\mathbf{tg2x+tg3x+\frac{1}{\sin x.\cos 2x.\cos 3x}=0}$$

Đ.H. Sư phạm Vinh (1997)

GIẢI

Ta có: $tg2x+tg3x+\frac{1}{\sin x.\cos 2x.\cos 3x}=0$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \cos 3x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\\ x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\\ x \neq k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}\\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\end{cases}$

Từ (1) ta suy ra:

$$\frac{\sin 5x}{\cos 2x.\cos 3x} + \frac{1}{\sin x.\cos 2x.\cos 3x} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \sin 5x \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 4x - \cos 6x = -2$

Do đó: $\begin{cases}\cos 4x = -1\\ \cos 6x = 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 2x = 0 & (2)\\ \cos 6x = 1 & (3)\end{cases}$

Do điều kiện $\cos 2x \neq 0$ nên (2) vô nghiệm, khi $\cos 2x = 0$ thì $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 0$ trái với (3). Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

Bài 235

Giải phương trình: **$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$**

Đ.H. Sư phạm Vinh

GIẢI

Phương trình đã cho sắp xếp lại, ta có:

$(\sin 6x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 2x) + (\sin 4x + \sin 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{7x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{7x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right) = 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}(2\cos x + 1) = 0$

- Với $\sin\frac{7x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{2} = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{7}}$ $(k \in Z)$
- Với $\cos\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}}$ $(k \in Z)$
- Hoặc $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 236

Giải phương trình: $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0$

Đ.H. Kiến trúc Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin 3x\cos x - 2\sin^2 3x + \cos 3x + \sin x\cos 3x - 2\cos^2 3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\sin 3x\cos x + \sin x\cos 3x) + \cos 3x - 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin 4x + \cos 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin 4x + \cos 3x = 2$

Do đó: $\begin{cases} \sin 4x = 1 & (1) \\ \cos 3x = 1 & (2) \end{cases}$

Giải (1) ta được: $4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$

Giải (2) ta được: $3x = 2l\pi \Leftrightarrow x = \frac{2l\pi}{3} \quad (l \in Z)$

Nghiệm của phương trình thoả mãn k, l là các số nguyên sao cho:

$$\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} = \frac{2l\pi}{3}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{k}{2} = \frac{2l}{3}$$

Hay $\quad 3 + 12k = 16l \qquad (3)$

Phương trình (3) không có nghiệm k, l ∈ Z vì vế phải chẵn, vế trái lẻ.

- Nếu thay nghiệm $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ vào (2), ta có:

$$\cos 3x = \cos 3\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) \neq 1$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 237

Tam giác ABC là tam giác gì nếu: $\begin{cases} \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0 \\ \cos A . \cos B = \sin^2 \frac{C}{2} \end{cases}$

Đ.H. Kiến trúc Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 2\sin\frac{3A + 3B}{2}\cos\frac{3A - 3B}{2} + \sin 3C$

$$= -2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right) + 2\sin\frac{3C}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

$$= -2\cos\frac{3C}{2}\cos\left(\frac{3A-3B}{2}\right) + 2\sin\frac{3(\pi-(A+B))}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

$$= -2\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + 2\sin\left[\pi + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{3A+3B}{2}\right)\right]\cos\frac{3C}{2}$$

$$= -2\cos\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3A+3B}{2}\right)\right]$$

$$= -2\cos\frac{3C}{2}\left[\cos\frac{3A-3B}{2} + \cos\frac{3A+3B}{2}\right]$$

$$= -2\cos\frac{3C}{2}.2\cos\frac{3A}{2}\cos\left(\frac{-3B}{2}\right)$$

$$= -4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2} = 0 \qquad (1)$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\cos\frac{3A}{2} = 0\\ \cos\frac{3B}{2} = 0\\ \cos\frac{3C}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A = \frac{\pi}{3}\\ B = \frac{\pi}{3}\\ C = \frac{\pi}{3}\end{array}\right.$

Xét $\cos A.\cos B = \sin^2\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B) = \frac{1-\cos C}{2}$

$\Leftrightarrow \quad -\cos C + \cos(A-B) = 1 - \cos C$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B) = 1$ suy ra $A = B$ (2)

Như vậy thì (1) ít nhất có góc $C = \frac{\pi}{3}$ mà theo (2) thì A = B. NênABC là tam giác đều.

Bài 238

Cho phương trình: $\cos^3x + \sin^3x = k\sin x\cos x$

a/ Giải phương trình với $k = \sqrt{2}$

b/ Với giá trị nào của k thì phương trình có nghiệm.

Đ.H. Kiến trúc (Cơ sở Thủ Đức, 997)

GIẢI

Đặt $t = \sin x + \cos x$ với $|t| \le \sqrt{2}$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Suy ra $\sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có: $\cos^3 x + \sin^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x)$

$$= t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}t\left(3 - t^2\right)$$

a/ Khi $k = 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{2}t(3 - t^2) = \sqrt{2}.\frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

$\Leftrightarrow$ $3t - t^3 = \sqrt{2}\,t^2 - \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ $t^3 + \sqrt{2}\,t^2 - 3t - \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2} - 1)(t + \sqrt{2} + 1) = 0$

- Với $t - \sqrt{2} = 0$ suy ra $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

  $\Leftrightarrow$ $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

  Nghiệm số $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $t + \sqrt{2} - 1 = 0$ thì $t = 1 - \sqrt{2}$

  suy ra $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$

  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$

  Nghiệm số $\boxed{x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $t + \sqrt{2} + 1 = 0$ thì $t = -1 - \sqrt{2} < -\sqrt{2}$ (loại)

b/ Phương trình đã cho có nghiệm trong $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Ta có: $\frac{1}{2}t(3 - t^2) = k.\frac{1}{2}(t^2 - 1)$

Hay $\quad t^3 + kt^2 - 3t - k = 0$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + kt^2 - 3t - k$ liên tục trong $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

- Với $t = -\sqrt{2}$ thì $f(-\sqrt{2}) = k + \sqrt{2}$
- Với $t = \sqrt{2}$ thì $f(\sqrt{2}) = k - \sqrt{2}$
- Với $t = 0$ thì $f(0) = -k$

Ta lập bảng xét dấu sau:

k	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(-\sqrt{2})f(0)$		–	0	+	0	–		–	
$f(0)f(\sqrt{2})$		–		–	0	+	0	–	

Bảng xét dấu cho biết với ∀k phương trình đều có nghiệm $\in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Bài 239

Tam giác ABC có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$

Chứng minh ABC là tam giác vuông

GIẢI

Ta có: $\quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 = -1$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C.\cos(A - B) + 2\cos^2 C = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos C.[\cos C - \cos(A - B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos C.[-\cos(A + B) - \cos(A - B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C\,[2\cos A.\cos(-B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos A.\cos B.\cos C = 0$

Với $\cos A = 0$, hoặc $\cos B = 0$ hoặc $\cos C = 0$ thì $A = 90^0$, $B = 90^0$ hoặc $C = 90^0$. Vậy ABC là tam giác vuông.

Bài 240

Tìm nghiệm của phương trình $\quad \cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$

thoả mãn điều kiện : $\quad \frac{2}{5}\pi < x < \frac{6}{7}\pi$

Đ.H. Kinh tế Quốc dân (1997)

GIẢI

Phương trình có dạng $a\cos x + b\sin x = c$
Phương trình có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c$

Suy ra phương trình: $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ có nghiệm vì:

$$1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 > \left(\sqrt{2}\right)^2$$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{\pi}{6}\cos 7x - \sin 7x\cos\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} - 7x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Hay $\sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$

Suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 7x - \frac{\pi}{6} = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi \end{array}\right.$$

Giải ra ta được các nghiệm: $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \\ x_2 = \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \end{array}}$ $(k \in Z)$

Với số nghiệm thứ nhất, ta có: $\frac{2}{5}\pi < \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} < \frac{6}{7}\pi$

Từ đó suy ra: $\frac{7}{5} - \frac{5}{24} < k < 3 - \frac{5}{24}$, mà $k \in Z$ nên $k = 2$

Với nghiệm số thứ hai, ta có: $\frac{2}{5}\pi < \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} < \frac{6}{7}\pi$

Từ đó suy ra: $\frac{7}{5}\pi - \frac{11\pi}{24} < k < 3 - \frac{11\pi}{24}$ mà $k \in Z$ nên $k = 1$ hoặc $k = 2$.

- Với $k = 2$ ta có nghiệm $x_1 = \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} = \frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{53\pi}{84}$
- Với $k = 1$ ta có nghiệm $x_2 = \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} = \frac{11\pi}{84} + \frac{2\pi}{7} = \frac{35\pi}{84}$
- Với $k = 2$ ta có nghiệm $x_2 = \frac{11\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} = \frac{11\pi}{84} + \frac{4\pi}{7} = \frac{59\pi}{84}$

Vậy, phương trình có 3 nghiệm: $\boxed{x_1 = \frac{53\pi}{84} \quad ; \quad x_2 = \frac{35\pi}{84} \quad \text{và} \quad \frac{59\pi}{84}}$

Bài 241

Giải phương trình: $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

Đ.H. Ngoại thương (1997.A)

GIẢI

Ta có: $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

$\Leftrightarrow\quad 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$

$\Leftrightarrow\quad 9\sin x + 6\cos x(1 - \sin x) - 2\sin^2 x = 7$

$\Leftrightarrow\quad 6\cos x(1 - \sin x) = 2\sin^2 x - 9\sin x + 7$

$= (\sin x - 1)(2\sin x - 7)$

$\Leftrightarrow\quad 6\cos x(1 - \sin x) + (1 - \sin x)(2\sin x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow\quad (1 - \sin x)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0$

Do đó: $1 - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow\quad \sin x = 1$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Và $6\cos x + 2\sin x - 7 = 0$ hay $6\cos x + 2\sin x = 7$

Phương trình này vô nghiệm vì $6^2 + 2^2 < 7^2$

Vậy, phương trình có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 242

Các góc tam giác ABC thoả mãn hệ thức: $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C}$

Biết rằng các góc A và B nhọn, hãy tính giá trị góc C.

Đ.H. Ngoại thương (1997.A)

GIẢI

Biết $0 < \sin C \le 1$ nên $\sqrt[9]{\sin C} \ge \sin^2 C$

$\sin^2 A + \sin^2 B \ge \sin^2 C$

Suy ra $a^2 + b^2 \ge c^2$

$a^2 + b^2 \ge a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Hay $2ab\cos C \ge 0$

$\cos C \ge 0 \qquad (1)$

Ta có: $\sqrt[9]{\sin C} + \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

Vế trái: $\sqrt[9]{\sin C} + \sin^2 C \le 2$

Tính vế phải:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}2\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$= 2 + 2\cos A.\cos.B\cos C$$

Do đó: $2 + 2\cos A.\cos.B\cos C \le 2$

Nên: $\cos A.\cos B.\cos C \le 0$ (2)

Vì A, B là góc nhọn nên cosA.cosB có giá trị dương nên từ (2) ta suy ra: $\cos C \le 0$.(3)

Từ (1) và (3), chỉ có thể $\cos C = 0 = \cos 90^0$. Vậy $\boxed{C = 90^0}$

Bài 243

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A < 1$

Đ.H. Ngoại thương (1997, D)

GIẢI

Trong tam giác thì sinA, sinB, sinC có giá trị dương.

và $\sin A, \sin B, \sin C \le 1$.

Nên $(1 - \sin A)$; $(1 - \sin B)$ và $(1 - \sin C) \ge 0$

Do đó: $\sin A(1 - \sin B) + \sin B(1 - \sin C) + \sin C(1 - \sin A) > 0$ (1)

Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $A = 90^0$ (hoặc B, C bằng 90^0)

Khai triển vế trái của (1) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

$\sin A - \sin A\sin B + \sin B - \sin B\sin C + \sin C - \sin C\sin A > 0$

$\sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A > 0$

Ta có: $1 - \sin A \ge 0$

$1 - \sin B \ge 0$

$1 - \sin C \ge 0$

Nên $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \ge 0$

Khai triển vế trái ta được:

$1 - (\sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin A\sin C - \sin A\sin B\sin C \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sin A\sin B\sin C \ge \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin A\sin C$

Suy ra:

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin A\sin C < 1$$

Chú ý:

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c) &= (1-b-a+ab)(1-c)\\ &= 1-c-b+bc-a+ac+ab-abc\\ &= 1-(a+b+c-ab-bc-ac)-abc\end{aligned}$$

Bài 244

Giải phương trình: $$2\text{tg}x + \text{cotg}x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

Đ.H. Ngoại thương (1997, đề 2)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases}$ suy ra $x \neq \frac{k\pi}{2}$

Ta có: $$\text{tg}x + \text{cotg}x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\text{tg}x + \text{tg}x + \text{cotg}x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x + \frac{2}{\sin 2x} = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$$

$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x = \sqrt{3}$ suy ra nghiệm số: $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Bài 245

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có:

$$\left(1+\text{tg}\frac{A}{2}\right)\left(1+\text{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1+\text{tg}\frac{C}{2}\right) \geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2}$$

S là diện tích, p là nửa chu vi của tam giác.

GIẢI

Ta có: $$\left(1+\text{tg}\frac{A}{2}\right)\left(1+\text{tg}\frac{B}{2}\right)\left(1+\text{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1+\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}$$

Biết $$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

Suy ra $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1 \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\geq 2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geq 2\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geq 2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Cộng vế với vế, suy ra:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\geq \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+2\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq 3$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2\geq 3$$

Vậy: $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\sqrt{3} \qquad (2)$$

Ta có: $$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

$$=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(b+c-a)(b+c+a)}$$

$$=\frac{(p-c)(p-b)}{(p-a)p}$$

Nên $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Tương tự: $$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Do đó:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}}$$

$$= \frac{S}{p^2} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có: vế trái $\geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2}$

Bài 246

Giải phương trình: $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2 - \sin^3 x - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

Đ.H. Dân lập Kỹ thuật Công nghệ (1997)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cos^2 x \neq 0 & \text{suy ra } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z) \\ 1 - \sin^3 x \neq 0 & \text{suy ra } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z) \end{cases}$

Ta có: $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{(1 - \sin^3 x) + 1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

$\Leftrightarrow \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \dfrac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \dfrac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$

Suy ra: $(1 - \sin x)(1 - \cos x)(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos s) = 0$

Vì $1 - \sin x \neq 0$ nên $\left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 \end{array}\right.$

- Với $1 - \cos x = 0$ suy ra nghiệm số $\boxed{x = 2k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Với $\quad \sin x + \cos x + \sin x \text{cossx} = 0 \qquad (1)$

Đặt $\quad \sin x + \cos x = t \ (|t| \le \sqrt{2})$ suy ra $\sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

(1) tương đương $t + \dfrac{t^2 - 1}{2} = 0$ hay $t^2 + 2t - 1 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm: $\quad t_1 = -1 - \sqrt{2}$ (loại)

$t_2 = -1 + \sqrt{2}$

Với $\quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$ suy ra:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 247

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không có góc tù thì:

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C) > 4$$

Đ.H. Dân lập Kỹ thuật Công nghệ (1997)

GIẢI

Vì tam giác ABC không có góc tù nên ta có: $\quad 0 < \cos A, \cos B, \cos C < 1$

Khi đó: $\quad \sin A.\sin B \ge \sin A.\sin B - \cos A.\cos B$

$$= -\cos(A + B) = \cos C \ge 0 \qquad (1)$$

Bình phương 2 vế của (1) $\quad \sin^2 A\sin^2 B \ge \cos^2 C$

Tương tự: $\quad \sin^2 B\sin^2 C \ge \cos^2 A$

$\sin^2 A\sin^2 C \ge \cos^2 B$

Suy ra: $\quad \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 C > \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

Xét: $(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \sin^2 C)$

$= 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C +$

$+ \sin^2 C\sin^2 A + \sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$

$> 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2 A\sin^2 B + \sin^2 B\sin^2 C + \sin^2 C\sin^2 A$

$> 1 + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B$

$= 1 + (\sin^2 A + \cos^2 A) + (\sin^2 B + \cos^2 B) + (\sin^2 C + \cos^2 C)$

$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$ (đpcm)

Bài 248

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\cos^3 x - \cos x + \sin y = 0\\ \sin^3 x - \sin y + \cos x = 0\end{cases}$

Đ.H. Ngoại ngữ – Tin học (1997)

GIẢI

Ta có: $\begin{cases}\cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 & (1)\\ \sin^3 x - \sin y + \cos x = 0 & (2)\end{cases}$

Cộng (1) và (2) ta được:

$$\cos^3 x + \sin^3 y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^3 x = -\sin^3 y$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x = -\sin y \qquad (3)$$

Thế siny ở (3) vào (1) ta có:

$$\cos^3 x - 2\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos^2 x - 2) = 0$$

Với $\cos x = 0$ ta có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Suy ra $\sin y = 0$ có nghiệm $\boxed{y = k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 249

Giải phương trình: $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$

Học viện Quan hệ quốc tế (1997)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\sin x} + \sin x = 1 - \sin^2 x - \cos x$$

$$= \cos^2 x - \cos x$$

Cộng $\frac{1}{4}$ vào 2 vế:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} + \sqrt{\sin x} + \sin x = \frac{1}{4} + \cos^2 x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$$

- $\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} = \cos x - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\sin x} = \cos x - 1$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\boxed{x = 2k\pi}$ $(k \in Z)$

- $\sqrt{\sin x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \cos x$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\sin x} = -\cos x$

Với $-\cos x \geq 0$, bình phương 2 vế, ta được phương trình:
$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Giải ra được: • $\sin x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ loại (vì < -1)

• $\sin x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\left[\begin{array}{ll} x = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi & \text{(loại vì } \cos x > 0) \quad (k \in Z) \\ x = \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2m\pi & (m \in Z) \end{array}\right.$$

Bài 250

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} \geq 3\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right)$$

GIẢI

Trong tam giác ta có:

$$\cot g\frac{C}{2} = tg\frac{A+B}{2} = \frac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot g\frac{C}{2} = \frac{\dfrac{1}{\cot g\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\cot g\frac{B}{2}}}{1 - \dfrac{1}{\cot g\frac{A}{2}} \cdot \dfrac{1}{\cot g\frac{B}{2}}} = \frac{\cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{A}{2}}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2} - 1}$$

Suy ra: $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} - \cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}$

Hay $\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$

Ta có:

$$\left(\cot g\frac{A}{2}-\cot g\frac{B}{2}\right)^2+\left(\cot g\frac{B}{2}-\cot g\frac{C}{2}\right)^2+\left(\cot g\frac{C}{2}-\cot g\frac{A}{2}\right)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cot g^2\frac{A}{2}+2\cot g^2\frac{B}{2}+2\cot g^2\frac{C}{2}\geq 2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+2\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}\Leftarrow$$

$$\cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}\geq\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

Cộng 2 vế thêm:

$$2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+2\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

VT =

$$\cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+2\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+2\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$=\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^2$$

$$=\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$VP = 3\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+3\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+3\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

Do đó:

$$\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$\geq 3\left(\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}\right)$$

$$\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\geq 3\left(\frac{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}}\right)$$

$$\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\geq 3\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)\quad \text{(đpcm)}$$

Bài 251

Giải phương trình lượng giác: cosxsinx + |cosx + sinx| = 1

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1997 A)

GIẢI

Đặt $t = |\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| \quad (|t| \leq \sqrt{2})$

Suy ra: $\sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$

Phương trình tương đương:

$$t + \frac{t^2-1}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - 3 = 0$$

Phương trình có 2 nghiệm: $\begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \quad \text{(loại)} \end{cases}$

Do đó: $|\cos x + \sin x| = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0$$

nghiệm số: $2x = k\pi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

Bài 252

Giải phương trình lượng giác: $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1997, B)

GIẢI

Ta có: $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

$$2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left[2 - \frac{1}{\sin x\cos x}\right] = 0$$

- Với $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ta có nghiệm $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $2 - \dfrac{1}{\sin x\cos x} = 0$ $(\sin x\cos x \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sin 2x = 1$$

Có nghiệm $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \qquad (k \in Z)$$

Bài 253

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|1 - |1 + \sin 3x||}{\sqrt{1 - \cos x}}$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1997, B)

GIẢI

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|1 - |1 + \sin 3x||}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|1 - 1 - \sin 3x|}{\sqrt{1 - \cos x}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|4\sin^3 x - 3\sin x|}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|\sin x||4\sin^2 x - 3|}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sqrt{1 - \cos x}} |4\sin^3 x - 3|$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{1 + \cos x}|4\sin^3 x - 3| = \sqrt{2}.3 = 3.\sqrt{2}$$

Bài 254

1. Giải phương trình: $2 + \cos 2x = -5\sin x$.
2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta có: $\sin A.\sin B \le \cos^2 \frac{C}{2}$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1997, D)

GIẢI

1. Ta có: $2 + \cos 2x = -5\sin x$

$\Leftrightarrow \quad 3 - 2\sin^2 x = -5\sin x$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$

Phương trình có nghiệm sinx = $\frac{-1}{2}$ suy ra: $\left\{\boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}}\right.$ $(k \in Z)$

sinx = 3 (vô nghiệm)

2. Ta có: $\sin A \sin B \le \cos^2 \frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] \le \frac{1}{2}(1 + \cos C)$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A - B) + \cos C \le 1 + \cos C$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A - B) \le 1$ (luôn đúng trong mọi tam giác)

Bài 255

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau đây có nghiệm:

$$4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m$$

Đ.H. Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1997, D)

GIẢI

Ta có: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

Do đó phương trình đã cho là:

$$4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) - 4\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \sin^2 4x = m$$

$\Leftrightarrow \quad 4 - 2\sin^2 2x - 4 + 3\sin^2 2x - \sin^2 4x = m$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x - \sin^2 4x - m = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x - 4\sin^2 2x\cos^2 2x - m = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x - 4\sin^2 2x(1 - \sin^2 2x) - m = 0$

Đặt $t = \sin^2 2x \quad (0 \le t \le 1)$

Ta có phương trình: $4t^2 - 3t - m = 0 \quad (0 \le t \le 1)$ (1)

Để phương trình có nghiệm, nghiệm $t \in [0; 1]$

$$\left[\begin{array}{l} f(0)(f(1) = -m(1-m) < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta = 9 + 16m \ge 0 \\ f(0) = -m \ge 0 \\ f(1) = 1 - m \ge 0 \\ 0 \le \dfrac{S}{2} = \dfrac{3}{8} \le 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 1 \\ -\dfrac{9}{6} \le m \le 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{6} \le m < 1$$

Do đó,m phải thoả mãn $\boxed{\dfrac{-9}{16} \le m \le 1}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Cách khác: Từ phương trình $4t^2 - 3t = m$, ta xét:

$f(t) = 4t^2 - 3t$

$f'(t) = 8t - 3;$

$f'(t) = 0$ khi $t = \dfrac{3}{8}$

t	0		$\frac{3}{8}$		1
f'(t)		−	0	+	
f(t)	0	↘	$-\frac{9}{16}$	↗	1

Do đó suy ra phương trình có nghiệm khi $-\dfrac{9}{16} \le m \le 1$.

Bài 256

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{3}{2} \le \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$

Đ.H. Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1997, D)

GIẢI

Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < 2$

Giả sử $a \le b \le c$ thì $\dfrac{a}{b+c} < \dfrac{a}{a+b}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b}{c+a} < \frac{b}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{c}{a+b} < \frac{c}{c}$$

Suy ra: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{c}{c} = 2$

Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$

Theo Cô si ta có:

$$(a+b) + (b+c) + (c+a) \geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow\ 2(a+b+c)\left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right] \geq 9 \qquad (2)$$

Nhân (1) và (2) được:

$$\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 257

Cho phương trình: $4\cos^5 x\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x + m$ (1)

Biết rằng $x = \pi$ là một nghiệm của (1). Hãy giải phương trình (1) trong trường hợp đó.

GIẢI

Khi $x = \pi$ thì $\sin x = 0$ và $\cos x = -1$

Thế các giá trị của sinx và cosx vào (1), ta có:

$$4.0 - 4.0(-1) = 0 + m$$

$$\Rightarrow \quad m = 0$$

Khi m = 0 thì phương trình (1) trở thành:

$$4\cos^5 x\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin x\cos x(\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 4x = \sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 4x(1 - \sin 4x) = 0$$

Do đó: $\sin 4x = 0$

$$= \sin 0 = \sin k\pi$$

$$\Rightarrow \quad 4x = k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{4}} \quad (k \in Z)$$

$1 - \sin 4x = 0$ thì $\sin 4x = 1$

$$\Rightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

Bài 258

> **Giải bất phương trình:**
>
> $$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$$

GIẢI

Ta có: $2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x > 2(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow \quad 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) - 2(\sin x + \cos x) > 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)\left[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2\right] > 0$

Xét $\quad f(x) = (\cos x + \sin x)(2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2)$

Vì $f(x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ 2π nên chỉ cần xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[0, 2\pi]$.

$$f(x) = 0 \text{ thì } \left[\begin{array}{ll} \cos x + \sin x = 0 & (1) \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Từ phương trình (1) ta suy ra:

$$\text{tg}x = -1 \text{ có nghiệm } \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Với $0 \le x \le 2\pi$ nên $x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$$\text{và} \quad \boxed{x = \frac{7\pi}{4}}$$

Từ phương trình (2) ta có: $\quad 2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - 2 = 0$

Đặt $\quad t = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. $(|t| \le \sqrt{2}\,)$

Suy ra $\quad \sin x\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$

Do đó (2) là $\quad 2t + \frac{1 - t^2}{2} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \text{suy ra} \quad \left[\begin{array}{ll} t = 1 & \\ t = 3 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Do đó: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Nghiệm số: $\left[\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{array}}\right.$

Ta lập bảng xét dấu hàm số f(x)

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng biến thiên, ta suy ra nghiệm của phương trình là:

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \qquad (k \in Z)$$

Bài 259

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không có góc tù thì:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Đ.H. Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1997, A)

GIẢI

Ta có: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

Mẫu số: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 1$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \geq \cos A + \cos B + \cos C + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Rightarrow (\sin A - \cos A) + (\sin B - \cos B) + (\sin C - \cos C) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right] \ge \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right] \ge \cos A+\cos B+\cos C \qquad (2)$$

Để chứng minh bất đẳng thức (1), ta chứng minh bất đẳng thức (2).

Ta có: $\cos A+\cos B+\cos C = \sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)$

$$=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\pi+(B+C)\right]+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\pi+(A+C)\right]+\sin\left[\frac{\pi}{2}-\pi+(A+B)\right]$$

$$=\sin\left(B+C-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(A+C-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\left[\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\sin\left[\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\sin\left[\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\le 2\left[\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(B-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 260

Cho phương trình: $\cos 4x = \cos^2 3x + a\sin^2 x$

1. **Bằng cách biến đổi $t=\cos 2x$, hãy giải phương trình khi $a=1$.**
2. **Xác định tham số a để phương trình có nghiệm trong $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$**

Đ.H. Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1997, A

GIẢI

1. Với $a = 1$, ta có phương trình: $\cos 4x = \cos^2 3x + \sin^2 x$

Đặt $t = \cos 2x$ với $-1 \le t \le 1$

Ta có: $2t^2 - 1 = \frac{1}{2}(1 + 4t^3 - 3t) + \frac{1}{2}(1 - t)$

$\Leftrightarrow \quad 4t^3 - 4t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 1) = 0$

- Với $t - 1 = 0$ thì $\cos 2x = 1$
- Với $t^2 - 1 = 0$ thì $\cos 2x = \pm 1$ suy ra $\sin 2x = 0$

Phương trình có nghiệm $\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

2. Phương trình đã cho: $\cos 4x = \cos^2 3x + a\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x - 1 = \frac{1 + \cos 6x}{2} + a\frac{(1 - \cos 2x)}{2}$

Đặt $t = \cos 2x$ $(-1 \le t \le 1)$, ta có:

$\Leftrightarrow \quad 4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 + a(1 - t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (t - 1)(4t^2 - 3 - a) = 0$

Do đó: $t = 1$ (loại) và $t^2 = \frac{a + 3}{4}$

Muốn có nghiệm $0 < x < \frac{\pi}{12}$ thì $\frac{3}{4} < t^2 < 1$

Suy ra: $\frac{3}{4} < \frac{a + 3}{4} < 1$ hay $\boxed{0 < a < 1}$

BÀI 261

Giải bất phương trình ;

$$3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - 4} + 3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right) + 8} \le 2\cos^2 x$$

ĐH. Quy Nhơn (1997)

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Cô si **Đáp số :** $\boxed{x = 2\pi}$

BÀI 262

Giải phương trình : **(1-tgx) (1+sin2x) = 1+ tgx**

Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội (1997)

GIẢI

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$

Biết $\sin 2x = \frac{2\text{tg}x}{1 + \text{tg}^2 x}$

Đặt $t = \text{tg}x$ thì phương trình đã cho là:

$$(1 - t)\left(1 + \frac{2t}{1 + t^2}\right) = 1 + t$$

$\Leftrightarrow \quad (1 - t)(1 + t^2 + 2t) = (1 + t)(1 + t^2)$

$\Leftrightarrow \quad (1 - t)(1 + t)^2 = (1 + t)(1 + t^2)$

$\Leftrightarrow \quad (1 + t)\left[(1 + t^2) - (1 - t)(1 + t)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 + t)(1 + t^2 - (1 - t^2)) = 0$

Do đó: $t = 0$ suy ra $\text{tg}x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi} \quad (k \in Z)$

$t = -1$ suy ra $\text{tg}x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$

Bài 263

Giải phương trình: $4\cos^2 x - \cos 3x = 6\cos x + 2(1 + \cos 2x)$

Đ.H. Thái Nguyên (1997)

GIẢI

Ta có: $4\cos^2 x - \cos 3x = 6\cos x + 2(1 + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos x + 2.2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x - 4\cos^3 x + 3\cos x = 6\cos x + 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x + 3\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(4\cos^2 x + 3) = 0$

Do đó: • $\cos x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (k \in Z)$

• $4\cos^2 x + 3 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = -\frac{3}{4}$ (vô nghiệm)

Bài 264

Giải phương trình: $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0$

Đ.H. Thương mại (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$

Do đó, ta có: $\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos\frac{3x}{4} = 1 \end{cases}$

Giải ra, ta được các nghiệm số:

$$\boxed{x = k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{và} \quad \boxed{x = \frac{8l\pi}{3}} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

Ta cần tìm k, l sao cho xảy ra đồng thời đúng cả hai nghiệm $x = k\pi$ và $x = \frac{8l\pi}{3}$ nghĩa là $k\pi = \frac{8l\pi}{3}$ hay $3k = 8l \Leftrightarrow \begin{cases} k = 8m \\ l = 3m \end{cases}$

Do đó nghiệm của phương trình là $\boxed{x = 8m\pi}$

Bài 265

Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC có:

$$bc\sqrt{3} = R(2(b + c) - a)$$

(trong đó a, b, c là các cạnh của tam giác, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác) thì ABC là một tam giác đều.

Đ.H. Thương mại (1997)

GIẢI

Ta có: $bc\sqrt{3} = R(2(b + c) - a)$ (1)

áp dụng định lý hàm số sin, ta suy ra $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$; $c = 2R\sin C$, từ (1) ta có:

$\sqrt{3}\,(2R\sin B).(2R\sin C) = R(2(2R\sin B + 2R\sin C) - 2R\sin A)$

$\Leftrightarrow 2.\sqrt{3}\sin B\sin C = 2(\sin B + \sin C) - \sin A$

$$= 2\sin B + 2\sin C - \sin(B + C)$$

$$= 2\sin B + 2\sin C - (\sin B\cos C + \sin C\cos B)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right] + 2\sin C\left[1 - \left(\frac{1}{2}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1 - (\sin 30^0\cos C + \sin C\cos 30^0)\right] +$$

$$+ 2\sin C\left[1 - (\sin 30^0\cos B + \sin B\cos 30^0)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin B\left[1 - \sin(C + 30^0)\right] + 2\sin C\left[1 - \sin(B + 30^0)\right] = 0$$

Dấu "đẳng thức" chỉ xảy ra khi:

$$\begin{cases} \sin(C + 30^0) = 1 & \text{suy ra} \quad C = 60^0 \\ \sin(B + 30^0) = 1 & \text{suy ra} \quad B = 60^0 \end{cases}$$

Chứng tỏ ABC là tam giác đều.

Bài 266

Cho $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$

1. **Tính $f'\left(\frac{-\pi}{24}\right)$**
2. **Giải phương trình $f(x) = 1$**
3. **Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm.**

Đ.H. Thuỷ lợi (1997)

GIẢI

1. Ta có:

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= 1.(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}.\frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

$$f'(x) = \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right)' = \frac{3}{8}(-4\sin 4x) = \frac{-3}{2}\sin 4x$$

$$f'\left(\frac{-\pi}{24}\right) = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{-4\pi}{24}\right) = -\frac{3}{2}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$$

2. Giải phương trình: $f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos 4x = 3$$

Suy ra: $\cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = k2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = k\frac{\pi}{2}} \quad (k \in Z)$

3. $f(x) = m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = m \Rightarrow \cos 4x = \frac{8m-5}{3}$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$-1 \le \frac{8m-5}{3} \le 1$ từ đó suy ra: $\boxed{\frac{1}{4} \le m \le 1}$

Bài 267

Giải phương trình: $$\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \cos^4 4x$$

Đ.H. Xây dựng (1997)

GIẢI

Điều kiện: $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 2x\right] \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ là hai góc phụ nhau nên:

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cot g\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

Suy ra mẫu số: $tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$

Do đó phương trình đã cho là:

$$\sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin^2 2x+\cos^2 2x)^2-2\sin^2 2x\cos^2 2x=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-2.\frac{1}{4}\sin^2 4x=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 4x)=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\cos^2 4x=2.\cos^4 4x$$

$$2\cos^4 4x-\cos^2 4x-1=0$$

Giải phương trình này ta được:

$\cos^2 4x=1$ suy ra $\sin 4x=0$

$$\Rightarrow \quad 4x=k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{k\pi}{4}} \quad (k\in Z)$$

và $\cos^2 4x=-\frac{1}{2}$ (vô nghiệm)

Bài 268

Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức: $P=\sin^2 x+\sin^4 y+\sin^6 z$

khi $\sin x+\sin y+\sin z=0$

Đ.H. Xây dựng

GIẢI

a/ Ta có: $P=\sin^2 x+\sin^4 y+\sin^6 z$

Trong ba số sinx, siny, sinz không thể cùng dấu, vì nếu cùng dương thì tổng $\sin x+\sin y+\sin z>0$, hoặc cùng âm thì $\sin x+\sin y+\sin z<0$. Vậy trong ba số đó luôn tồn tại hai số cùng dấu. (1)

Ta xét trường hợp $\sin x\le\sin y\le\sin z$ (các trường hợp khác cũng tương tự), sinx và $\sin y\le 0$ thì theo (1) $\sin z\ge 0$

$$\text{Do}\begin{cases}-1\le\sin x,\sin y,\sin z\le 1\\ \sin z\ge 0\\ \sin x\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^6 z\le\sin z\\ \sin^4 y\le|\sin y|\\ \sin^2 x\le|\sin x|=-\sin x\end{cases}$$

- Nếu $\sin y\le 0\Rightarrow P=\sin^2 x+\sin^4 y+\sin^6 z\le -\sin x-\sin y+\sin z$

$$=-(\sin x+\sin y+\sin z)+2\sin z$$

$= \quad 0 + 2\sin z \leq 2$

- Nếu $\sin y \geq 0$ thì $\Rightarrow P = \sin^2 x + \sin^4 y + \sin^6 z \leq -\sin x + \sin y + \sin z$

$= +(\sin x + \sin y + \sin z) - 2\sin x$

$= 0 - 2\sin x \leq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sin x = -1$, $\sin y = 0$, $\sin z = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P: $\boxed{P\max = 2}$

b/ Vì $\sin^2 x \geq 0$; $\sin^4 y \geq 0$ và $\sin^6 x \geq 0$ nên giá trị bé nhất của $P = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 z \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin x = \sin y = \sin z = 0$

Vậy $\boxed{\min P = 0}$

Bài 269

Cho phương trình: $\sin 2x + \sqrt{3}\,m = 2\cos x + \sqrt{3}\,m\sin x$

1. Giải phương trình với m = 1

2. Tìm m để phương trình có nhiều hơn một nghiệm trong$(0, \pi)$.

Trung tâm Đào tạo Bồi dưỡng cán bộ Y T.P. HCM

GIẢI

1. Với m = 1, ta có phương trình:

$$\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - \sqrt{3}) = 2\cos x - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\cos x - \sqrt{3})(\sin x - 1) = 0$$

Do đó: $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{suy ra} \quad \boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

- Với $\sin x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin x = 1 \quad \text{suy ra} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có: $\sin 2x + \sqrt{3}\,m = 2\cos x + \sqrt{3}\,m\sin x$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\,m\sin x = 2\cos x - \sqrt{3}\,m$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(2\cos x - \sqrt{3}\,m)(\sin x - 1)\,(2\cos x - \sqrt{3}\,m) = 0$$

$$(2\cos x - \sqrt{3}\,m)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2\cos x - \sqrt{3}m = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Với $\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

Nghiệm $x \in (0,\pi) \Rightarrow$ phương trình $\sin x - 1 = 0$ chỉ có

1 nghiệm $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$

• $2\cos x - \sqrt{3}\,m = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}m}{2}$

Với $\forall m$ thì phương trình (1) luôn có 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$

$\Rightarrow$ Để phương trình (1) có nhiều hơn 1 nghiệm $x \in (0,\pi)$ thì ta phải có

$$\left[\begin{array}{l} -1 < \frac{\sqrt{3}m}{2} < 1 \\ \frac{\sqrt{3}m}{2} \neq 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\ \boxed{\begin{array}{c} \frac{-2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \\ m \neq 0 \end{array}}\right.$$

Bài 270

Bằng cách dùng t = tgx, giải phương trình: $\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$
Đ.H. Y Dược T.P. Hồ Chí Minh (1997)

GIẢI

Ta có:

$$\sin x.\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x \qquad (1)$$

Do $\cos x = 0$ không thoả mãn (1), nên $\cos x \neq 0$.
Chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta có:

$$2tg^2x + 3tgx(1 + tg^2x) - 4tg^3x = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad -tg^3x + 2tg^2x + 3tgx = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad (tg - 2)(tg^2x - 3) = 0$$

Do đó: $tgx = 2$ suy ra nghiệm.

$$\boxed{x = arctg(2) + k\pi} \ (k \in Z)$$

$$tg^2x - 3 = 0 \text{ suy ra:} \left[\begin{array}{l} tgx = \sqrt{3} \quad \text{suy ra} \\ tgx = -\sqrt{3} \quad \text{suy ra} \end{array}\right. \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}} \qquad (k \in Z)$$

Bài 271

Chứng minh rằng bất phương trình: **$\sin x(\cos^2x + \sin 2x) + \sin 3x < 9\cos^3x$**

thoả mãn với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Đ.H. Y Dược T.P. H.C.M (1997)

GIẢI

Với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0$

Chia 2 vế của bất phương trình cho $\cos^3x > 0$, ta có:

$$\text{tg}x + 2\text{tg}^2x + 3\text{tg}x(1 + \text{tg}^2x) - 4\text{tg}^3x < 9$$

$$\Leftrightarrow \quad -\text{tg}^3x + 2\text{tg}^2x + 4\text{tg}x - 9 < 0$$

Hay $\quad \text{tg}^3x - 2\text{tg}^2x - 4\text{tg}x + 9 > 0$

Đặt $t = \text{tg}x$ $(t \in [0, +\infty)$, ta có: $\quad t^3 - 2t^2 - 4t + 9 > 0 \quad (t > 0)$

Đặt $f(t) = t^3 - 2t^2 - 4t + 9$

$f'(t) = 3t^2 - 4t - 4$

$f'(t) = 0$ suy ra $\begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{2}{3} \quad \text{(loại)} \end{cases}$

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	1 Min	$\nearrow$	

Giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ bằng 1 nên $f(t) > 0\ \forall t > 0$

Do đó bất phương trình đúng với mọi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 272

Giải phương trình: **$(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2x$**

K.T. Y tế 3 T.P. Hồ Chí Minh (1997)

GIẢI

Ta có: $\quad (2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2x$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin x\sin 2x + 2\sin x - 2\sin 2x - 1 = 3 - 4\cos^2x$

$\Leftrightarrow \quad 8\sin^2x\cos x + 2\sin x - 4\sin x\cos x - 1 = 3 - 4(1 - \sin^2x)$

$$= -1 + 4\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x\cos x + \sin x - 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x[4\sin x\cos x + 1 - 2(\cos x + \sin x)] = 0$$

Do đó: • $\sin x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

• $4\sin x\cos x + 1 - 2(\cos x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\sin x + \cos x) - 4\sin x\cos x - 1 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ $\quad |t| \le \sqrt{2}$

Thì $\sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Khi đó (1) ta có: $2t - 4\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2t - 2(t^2 - 1) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^2 - 2t - 1 = 0 \qquad (2)$$

Giải (2) ta được: $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ (thoả mãn $|t| \le \sqrt{2}$)

• Với $t = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ thì:

$$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Do đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \cos x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sin x\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Như vậy, sinx và cosx là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

Phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{thì } \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} & \text{thì } \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Các nghiệm là: $\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}}$ $(k \in Z)$

- Với $t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ thì:

$$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{-\sqrt{3}}{4}$$

Khi đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$

Như vậy, sinx và cosx là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - \frac{1-\sqrt{3}}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

Phương trình này có :

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} & \text{thì} \quad \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2} & \text{thì} \quad \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Các nghiệm là: $\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}}$ $(k \in Z)$

Bài 273

Giải phương trình: $\cos^4x + \sin^6x = \cos 2x$

Đ.H. Y Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos^4x + \sin^6x = \cos 2x$

$$= (\cos^2x - \sin^2x)$$
$$= (\cos^2x - \sin^2x)(\cos^2x + \sin^2x)$$
$$= \cos^4x - \sin^4x$$

$\Leftrightarrow \quad \sin^6x + \sin^4x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin^4x(\sin^2x + 1) = 0$

- Với $\sin^4x = 0$ thì $\sin x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

  Còn $\sin^2x + 1 > 0$

Bài 274

Giải phương trình: $\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$

Đ.H. Y Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos x.\frac{1}{2}\left[\cos x + \cos 2x\right] - \sin x.\frac{1}{2}\left[\cos(-x) - \cos 2x\right] = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos^2 x + \cos x.\cos 2x - \sin x\cos x + \sin x.\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 1 - \cos^2 x + \sin x\cos x$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x(\cos x + \sin x) = \sin^2 x + \sin x\cos x$

$= \sin x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow$ $(\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0$

- Với $\cos x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ suy ra $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $\cos 2x - \sin x = 0$ hay $1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Phương trình có: $\sin x = -1$ suy ra $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

vµ: $\sin x = \frac{1}{2}$ th× $\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ và $\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 275

Giải phương trình:

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Đ.H. Y Thái Bình (1997)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)\right]=2\left[\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)\right]=2.2\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(-\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=4\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)\left[1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)\right]=0$$

Do đó, ta có: $\cos\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$$\Rightarrow \frac{x}{5}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Có nghiệm số: $\boxed{x=\frac{5\pi}{4}+5k\pi}$ $(k\in Z)$

Và $1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)=0$

Hay $\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{2x}{5}+\frac{5\pi}{12}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

Suy ra: $\frac{2x}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{12}+2k\pi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$$\boxed{x=\frac{-5\pi}{12}+5k\pi}\quad (k\in Z)$$

Và $\frac{2x}{5}=-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ suy ra $\boxed{x=\frac{-5\pi}{3}+5k\pi}$ $(k\in Z)$

Bài 276

Giải phương trình: $\cos^4\dfrac{x}{2} - \sin^4\dfrac{x}{2} = \sin 2x$

Đ.H. Thuỷ sản (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 2\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0$$

Do đó: $\cos x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

$1 - 2\sin x = 0$ suy ra $\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}}$ $(k \in Z)$

Bài 277

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y \end{cases}$

Đ.H. Sư phạm Vinh (1997, A và B)

GIẢI

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = 1 + \cos y \\ \sqrt{2}\sin x = \sin y \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} 2\cos^2 x = 1 + 2\cos y + \cos^2 y \\ 2\sin^2 x = \sin^2 y \end{cases}$

Cộng 2 vế của hệ phương trình, ta được:

$$2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 + 2\cos y + \cos^2 y + \sin^2 y$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = 1 + 2\cos y + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos y = 0 \text{ suy ra } y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Thế $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ vào hệ phương trình đã cho ta có:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = (-1)^k \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

- Nếu k chẵn, đặt k = 2l, ta có:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ suy ra các nghiệm } \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2m\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi \end{array}} \right.$$

- Nếu k lẻ, đặt k = 2l + 1, ta có:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ suy ra các nghiệm: } \left\{ \boxed{\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2m\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + (2l + 1)\pi \end{array}} \right. \ (m, l \in Z)$$

Bài 278

Giải phương trình: $\cos^2 x = \cos^2 2x - 1$

Cao đẳng Sư phạm kỹ thuật I (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos^2 x = \cos^2 2x - 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 2x - 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 2x - 2$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0$$

Phương trình có các nghiệm số:

$$\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \dfrac{3}{2} \quad \text{loại vì} > 1 \end{cases}$$

Từ $\cos 2x = -1$ ta suy ra: $\cos 2x = \cos\pi$

$$\Rightarrow \quad 2x = \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \ (k \in Z)$$

Bài 279

Chứng minh rằng để ABC là tam giác đều thì điều kiện cần và đủ là:

$$\frac{1}{\cot gA+\cot gB}+\frac{1}{\cot gB+\cot gC}+\frac{1}{\cot gC+\cot gA}=\sin A+\sin B+\sin C$$

Đ.H. Sư phạm 2 Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có:

$$\cot gA+\cot gB=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$$

$$\cot gB+\cot gC=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\cot gC+\cot gA=\frac{\sin(C+A)}{\sin C\sin A}=\frac{\sin B}{\sin C\sin A}$$

Do đó, phương trình đã cho là:

$$\frac{1}{\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}}+\frac{1}{\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}}+\frac{1}{\dfrac{\sin B}{\sin C\sin A}}=\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\sin A\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}=\sin A+\sin B+\sin C$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\sin^2A\sin^2B+\sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2A}{\sin A\sin B\sin C}=\sin A+\sin B+\sin C \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$\sin^2A\sin^2B+\sin^2B\sin^2C\geq 2\sin^2B\sin A\sin C$ (2)

$\sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2A\geq 2\sin^2C\sin A\sin B$ (3)

$\sin^2A\sin^2B+\sin^2C\sin^2A\geq 2\sin^2A\sin B\sin C$ (4)

Cộng vế với vế (2), (3) và (4), ta được:

$2(\sin^2A\sin^2B+\sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2A)$

$\geq 2\sin A\sin B\sin C(\sin A+\sin B+\sin C)$

Hay:

$\sin^2A\sin^2B+\sin^2B\sin^2C+\sin^2C\sin^2A\geq\sin A\sin B\sin C(\sin A+\sin B+\sin C)$ (5)

Từ (1) và (5) suy ra: Dấu "=" xảy ra khi $\sin A=\sin B=\sin C$ ⇒ suy ra tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 280

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x\cos x}$

Tìm các giá trị của m để f(x) xác định với mọi x.

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội (1997)

GIẢI

Để f(x) xác định với mọi x ta phải có:

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x\cos x \geq 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - m\sin 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - m\sin 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x + 2m\sin 2x - 2 \leq 0 \quad \forall x$$

Đặt $t = \sin 2x \quad t \in (-1, 1)$

Ta được: $f(t) = t^2 + 2mt - 2 \leq 0 \quad \forall t \in (-1, 1)$ (1)

Để f(x) xác định với $\forall x \Rightarrow f(t) \leq 0$ với $\forall t \in \left[-1,1\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Các giá trị của m để f(x) xác định với mọi x là: $\boxed{-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}}$

Bài 281

Giải phương trình: $\cot g x - \mathrm{tg} x = \sin x + \cos x$

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội (1997)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$ Suy ra $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Phương trình đã cho: $\cot g x - \mathrm{tg} x = \sin x + \cos x$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x + \cos x)\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)\sin x\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)(\sin x\cos x + \sin x - \cos x) = 0$$

Với $\sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, suy ra $\boxed{x=-\frac{\pi}{4}+k\pi}$ $(k\in Z)$

- Với $\quad \sin x\cos x+\sin x-\cos x=0 \qquad (1)$

Đặt $\quad t=\sin x-\cos x \quad (|t|\le\sqrt{2})$ suy ra $t^2=1-\sin 2x$

Do $\quad \sin 2x\ne 0$ nên $t\ne\pm 1$

Khi đó (1) dẫn tới $\frac{1-t^2}{2}+t=0$ hay $t^2-2t-1=0$

Ta có 2 nghiệm $\quad t=1+\sqrt{2}$ (loại) và $t=1-\sqrt{2}$

Nên $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\,\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$

Suy ra $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ có nghiệm:

$$\boxed{x=-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{2}+2k\pi} \quad (k\in Z)$$

Bài 282

Tam giác ABC có: $\begin{cases}\cos B\cos C=\dfrac{1}{4}\\ a^2=\dfrac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}\end{cases}$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\quad a^2=\frac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c}$ Suy ra: $\qquad a^3-a^2b-a^2c=a^3-b^3-c^3$

$\Leftrightarrow \quad a^2(b+c)=b^3+c^3=(b+c)(b^2+c^2-bc)$

$\Leftrightarrow \quad a^2=b^2+c^2-bc \qquad (1)$

Theo định lý hàm số cos, ta có: $\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\quad b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A=60^0$$

Biết $\quad \cos B\cos C=\frac{1}{2}\left[\cos(B+C)+\cos(B-C)\right]=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 2\left[\cos(B+C)+\cos(B-C)\right]=1$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos A + \cos(B - C)) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} + \cos(B - C)) = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\cos(B - C) = 1 = \cos 0^0$

$$\Leftrightarrow \quad B - C = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad B = C$$

Trong tam giác ABC có $B = C$ và $A = 60^0$ nên là tam giác đều.

Bài 283

1. **Giải phương trình: $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$**
2. **Tam giác ABC có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$**

Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội (1997, phân ban)

GIẢI

1. Ta có: $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$

Giải ra, ta được: $\sin x = -\frac{1}{2}$ có nghiệm $\boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}}$

$\sin x = 3$ (vô nghiệm vì $\sin x \le 1$)

2. Ta có $\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A + B)\cos(A - B)$

$= -2\cos C.\cos(A - B)$

và $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$

Do đó phương trình đã cho là:

$-2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 = -1$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C\left[\cos(A - B) - \cos C\right] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C\left[\cos(A - B) + \cos(A + B)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C.2\cos A.\cos B = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos A.\cos B.\cos C = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos A = 0\\ \cos B = 0\\ \cos C = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}A = 90^0\\ B = 90^0\\ C = 90^0\end{array}\right. \Rightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác vuông}$$

Bài 284

Giải phương trình: $\cot g^2 x = \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$

Đ.H. Thuỷ sản (1997)

GIẢI

Ta có: $\cot g^2 x = \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq -1\end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi$

Phương trình (1) có thể viết:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x} - \frac{1+\sin x}{1+\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x} - 1\right) = 0$$

Do đó $1 + \sin x = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = -1$ Nghiệm số: $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Và $\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x} - 1 = 0$ $(\cos x \neq 1)$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \sin x - 1 + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}x = 1$

Nghiệm số: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

- Có thể áp dụng $\cos x - \sin x = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Ta cũng tìm được kết quả tương tự.

Bài 285

Giải phương trình: $\sin^3 2x\cos 6x + \sin 6x\cos^3 2x = \frac{3}{8}$

Đ.H. Lâm nghiệp (1997)

GIẢI

Ta có $\sin^3 2x\cos 6x + \sin 6x\cos^3 2x = \frac{3}{8}$ (1)

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x(\sin 2x\cos 6x) + \sin 6x\cos 2x.\cos^2 2x = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \quad (1-\cos^2 2x)(\sin 2x\cos 6x) + \sin 6x\cos 2x(1-\sin^2 2x)= \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \sin 2x\cos 6x - \sin 2x\cos^2 2x\cos 6x + \sin 6x\cos 2x -$

$-\sin^2 2x\cos 2x\sin 6x= \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow (\sin 2x\cos 6x + \sin 6x\cos 2x) -\sin 2x\cos 2x\,(\cos 6x\cos 2x + \sin 6x\sin 2x)= \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \quad \sin 8x - \frac{1}{2}\sin 4x\cos 4x = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \quad \sin 8x - \frac{1}{4}\sin 8x = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4}\sin 8x = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow \quad \sin 8x = \frac{1}{2}$ (2)

Nghiệm số: $8x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}} \quad (k \in Z)$

$8x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}} \quad (k \in Z)$

Cách khác.

Biết $\sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4}$ và $\cos^3 a = \frac{3\cos a + \cos 3a}{4}$

Phương trình (1) sẽ là:

$$\left(\frac{3\sin 2x - \sin 6x}{4}\right)\cos 6x + \sin 6x\left(\frac{3\cos 2x + \cos 6x}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4}(\sin 2x\cos 6x + \sin 6x\cos 2x) = \frac{3}{8}$$

$$\sin 8x = \frac{1}{2}$$

Ta được kết quả như ở (2).

Bài 286

Giải phương trình lượng giác sau:

$$\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$$

Học viện Kỹ thuật Mật mã (1997)

GIẢI

Ta có: $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$ (1)

áp dụng hằng đẳng thức: $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Khi đó:

$\sin^3 x + \sin^3 2x = (\sin x + \sin 2x)^3 - 3\sin x\sin 2x(\sin x + \sin 2x)$

$VT = (\sin x + \sin 2x)^3 - 3\sin x\sin 2x(\sin x + \sin 2x) + \sin^3 3x$ (2)

Vế phải của (1):

$(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3 = \left[(\sin x + \sin 2x) + \sin 3x\right]^3$

$= (\sin x + \sin 2x)^3 + 3(\sin x + \sin 2x)^2\sin 3x + 3(\sin x +$

$+ \sin 2x)\sin^2 3x + \sin^3 3x$ (3)

Thay kết quả ở (2) và (3) vào (1) rồi rút gọn, ta được:

$-3\sin x\sin 2x(\sin x + \sin 2x) = 3(\sin x + \sin 2x)^2\sin 3x +$

$+ 3(\sin x + \sin 2x)\sin^2 3x$

$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 2x)\left[(\sin x + \sin 2x)\sin 3x + \sin^2 3x + \sin x\sin 2x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 2x)\left[\sin 3x(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \sin x\sin 2x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 2x)\left[\sin 3x(2\sin 2x\cos x + \sin 2x) + \sin x\sin 2x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \sin 2x)\left[\sin 3x(\sin 2x)(2\cos x + 1) + \sin x\sin 2x\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x)(1 + 2\cos x)\sin 2x\left[\sin 3x(2\cos x + 1) + \sin x\right] = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x(1 + 2\cos x)\left[(3\sin x - 4\sin^3 x)(2\cos x + 1) + \sin x\right] = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x\cos x(1 + 2\cos x)\left[(3 - 4\sin^2 x)(2\cos x + 1) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x\cos x(1 + 2\cos x)\left[(3 - 4(1 - \cos^2 x))(2\cos x + 1) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\sin^3x\cos x(1 + 2\cos x)\left[(4\cos^2x - 1)(2\cos x + 1) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow\ 2\sin^3x\cos x(1 + 2\cos x)(8\cos^3x + 4\cos^2x - 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow\ 4\sin^3x\cos^2x(1 + 2\cos x)(4\cos^2x + 2\cos x - 1) = 0$

Do đó:

- Với $\sin x = 0$ ta có nghiệm $x = k\pi$
- Với $\cos x = 0$ ta có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Kết hợp 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$

- Với $1 + 2\cos x = 0$ ta có nghiệm $\boxed{x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $4\cos^2x + 2\cos x - 1 = 0$ ta có:

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \in [-1, 1]$$

Suy ra nghiệm: $\boxed{x = \pm\arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 287

Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

cos2A + cos2B + cos2C + 4cosAcosBcosC + 1 = 0

Học viện Kỹ thuật Mật mã (1997)

GIẢI

Ta cần chứng minh:

$$\cos2A + \cos2B + \cos2C + 4\cos A\cos B\cos C + 1 = 0 \qquad (1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos2A + \cos2B + \cos2C &= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + 2\cos^2C - 1\\ &= -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2C - 1\\ &= -2\cos C(\cos(A - B) - \cos C) - 1\\ &= -2\cos C(\cos(A-B) + \cos(A + B)) - 1\\ &= -2\cos C(2\cos A\cos(-B)) - 1\\ &= -4\cos A\cos B\cos C - 1 \qquad (2)\end{aligned}$$

Thế (cos2A + cos2B + cos2C) ở (2) vào (1), ta được:

$$-4\cos A.\cos B.\cos C - 1 + 4\cos A.\cos B.\cos C + 1 = 0$$

Vậy trong mọi tam giác ta luôn có:

$$\cos2A + \cos2B + \cos2C + 4\cos A.\cos B.\cos C + 1 = 0$$

Bài 288

Giải phương trình: $\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Do đó phương trình đã cho là:

$$2\cos^2 x - 1 + (1 - \cos^2 x) + 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 x - \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = -1$$

Nghiệm số $\boxed{x = \pi + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 289

Các cạnh của tam giác ABC thoả mãn hệ thức: $\frac{abc}{ab + bc + ac} = \frac{2}{9}p$

(p là nửa chu vi). Chứng minh tam giác ABC đều.

Cao đẳng Sư phạm Hà Nội (1997)

GIẢI

Ta có: $\frac{abc}{ab+bc+ac} = \frac{2}{9}p = \frac{a+b+c}{9}$

$$(ab + bc + ac)(a + b + c) = 9abc \qquad (1)$$

Với 3 số ab, bc, ac, theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \qquad (2)$$

Với 3 số a, b, c ta cũng có:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \qquad (3)$$

Nhân (2) và (3) ta có:

$$(ab + bc + ac)(a + b + c) \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,.3\sqrt[3]{abc} = 9abc \qquad (4)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $ab = bc = ac$ và $a = b = c$ nên tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 290

Giải phương trình: $\sin^8 2x + \cos^8 2x = 1$

Học viện Quân y (1994)

GIẢI

Ta có: $\sin^8 2x + \cos^8 2x = 1$

$\Leftrightarrow (\sin^4 2x + \cos^4 2x)^2 - 2\sin^4 2x\cos^4 2x = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow (\sin^4 2x + \cos^4 2x)^2 - 2.\frac{1}{16}\sin^4 4x = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow ((\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x\cos^2 2x)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 4x = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 4x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 4x = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 4x + \frac{1}{4}\sin^4 4x - \frac{1}{8}\sin^4 4x = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 8 - 8\sin^2 4x + 2\sin^4 4x - \sin^4 4x = 1$

$\Leftrightarrow \sin^4 4x - 8\sin^2 4x + 7 = 0$

Đặt $\sin^2 4x = t \quad (0 \le t \le 1)$

Ta có phương trình: $t^2 - 8t + 7 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm: $t_1 = \sin^2 4x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 8x}{2} = 1$

$\Leftrightarrow \cos 8x = -1$

$\Leftrightarrow 8x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}} \quad (k \in Z)$

$t_2 = 7$ (loại)

Bài 291

Giải phương trình: $(\sin x + 3)\sin^4\frac{x}{2} - (\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2} + 1 = 0$

Đ.H. Quân Y (1997)

GIẢI

Ta có: $(\sin x + 3)\sin^4\frac{x}{2} - (\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{2}(\sin x + 3)(\sin^2\frac{x}{2} - 1) + 1 = 0$

⇔ $-\sin^2\frac{x}{2}(\sin x+3).\cos^2\frac{x}{2}+1=0$

⇔ $-\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}(\sin x+3)+1=0$

⇔ $-\frac{1}{4}\sin^2x(\sin x+3)+1=0$

⇔ $-\sin^3x-3\sin^2x+4=0$

Hay $\sin^3x+3\sin^2x-4=0$

⇔ $(\sin x-1)(\sin x+2)^2=0$

Do đó: $\sin x-1=0$

⇒ $\sin x=1$

⇒ $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $(k\in Z)$

Bài 292

Giải phương trình: $(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x$

Học viện Quân y (1997)

GIẢI

Ta có: $(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x$

⇔ $(-2\sin 3x\sin x)^2=5+\sin 3x$

⇔ $4\sin^2 3x\sin^2 x=5+\sin 3x$

Vế trái ≤ 4, vế phải $5+\sin 3x\geq 4$.

Phương trình có nghiệm khi hai vế bằng 4.

Do đó phương trình đã cho dẫn đến hệ:

$$\begin{cases}4\sin^2 3x\sin^2 x=4\\5+\sin 3x=4\end{cases}$$

Giải ra, ta được: $\begin{cases}\sin^2 x=1\\\sin 3x=-1\end{cases}$ hay $\sin x=\pm 1$

- Với $\sin x=1$ thì $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x=-1$ thoả mãn.

  Suy ra nghiệm: $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2k\pi}$ $(k\in Z)$

- Với $\sin x=-1$ thì $\sin 3x\neq -1$ nên phương trình không thoả mãn.

Bài 293

Giải phương trình lượng giác: $(\sin x+3)\sin^4\frac{x}{2}-(\sin x+3)\sin^2\frac{x}{2}+1=0$

Học viện Quân Y

GIẢI

Ta có: $(\sin x + 3)\sin^4\frac{x}{2} - (\sin x + 3)\sin^2\frac{x}{2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -\sin^2\frac{x}{2}(\sin x + 3)(1 - \sin^2\frac{x}{2}) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}(\sin x + 3) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}\sin^2 x(\sin x + 3) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin^3 x + 3\sin^2 x - 4 = 0$ (dạng $a + b + c + d = 0$)

$\Leftrightarrow \quad (\sin x - 1)(\sin x + 2)^2 = 0$

- Với $\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$ Còn $\sin x + 2 > 0$.

Bài 294

Tam giác ABC có 3 góc nhọn A, B, C và:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Đ.H. Dân lập Đông đô (1997)

GIẢI

Từ $(x - y)^2 \geq 0$ suy ra $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy$

$\Leftrightarrow \quad (x + y)^2 \geq 4xy$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x + y}{xy} \geq \frac{4}{x + y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$

Do đó:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{4}{\cos A + \cos B} = \frac{4}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{4}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \geq \frac{2}{\sin\frac{C}{2}}$$

(Vì $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 2\sin\frac{C}{2}$) (1)

Dấu "=" khi A = B

Tương tự ta có: $\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\ge\frac{2}{\sin\frac{A}{2}}$, dấu "=" khi B = C (2)

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}\ge\frac{2}{\sin\frac{B}{2}}$$, dấu "=" khi A = C (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế và ước lược 2 ta có:

$$2\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)\ge 2\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\ge\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" khi A = B = C tức là tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 295

Giải phương trình: $\mathbf{tgx + cotgx = 2(sin2x + cos2x)}$

Đ.H. Dân lập Đông đô (1997)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\ \sin x\ne 0\end{cases}\Rightarrow\quad \sin 2x\ne 0\Rightarrow\quad x\ne\frac{k\pi}{2}$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2(\sin 2x+\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=2(\sin 2x+\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2}{\sin 2x}=2(\sin 2x+\cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin 2x(\sin 2x+\cos 2x)=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin^2 2x+\sin 2x.\cos 2x=1\quad\Leftrightarrow\quad \sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 4x=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}(1-\cos 4x)+\frac{1}{2}\sin 4x=1\quad\Leftrightarrow\quad \sin 4x-\cos 4x=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$$

Do đó: $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

$4x - \frac{\pi}{4} = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$ có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

Bài 296

Giải bất phương trình lượng giác:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3 - \frac{3}{\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1}$$

Đ.H. Dân lập Phương đông (197)

GIẢI

Điều kiện: $\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x + \sqrt{3}\sin x \neq -1$

Đặt $\cos x + \sqrt{3}\sin x = t$ thì $t \neq -1$ và $|t| \leq 2$

Ta có: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3 - \frac{3}{\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1}$

$\Leftrightarrow \quad t = 3 - \frac{3}{t+1}$

Hay $t^2 - 2t = 0$

$\Leftrightarrow \quad t(t-2) = 0$

Phương trình có 2 nghiệm $t = 0$ và $t = 2$

- Với $t = 0$ thì $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Nghiệm số: $\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $t = 2$ thì $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 297

Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:

$\dfrac{2(\cos^2 A + \cos^2 B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \cot g^2 A + \cot g^2 B$. Thì tam giác ABC cân.

Đ.H. Dân lập Phương đông (1997)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{2(\cos^2 A + \cos^2 B)}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \cot g^2 A + \cot g^2 B$

$2(\cos^2 A + \cos^2 B) = (\cot g^2 A + \cot g^2 B)(\sin^2 A + \sin^2 B)$

$= \cot g^2 A \sin^2 A + \cot g^2 A \sin^2 B + \cot g^2 B \sin^2 A + \cot g^2 B \sin^2 B$

$= \cos^2 A + \cot g^2 A \sin^2 B + \cot g^2 B \sin^2 A + \cos^2 B$

Rút gọn: $\cos^2 A + \cos^2 B = \cot g^2 A \sin^2 B + \cot g^2 B \sin^2 A$

$\Leftrightarrow \quad (\cos^2 A - \cot g^2 A \sin^2 B) + (\cos^2 B - \cot g^2 B \sin^2 A) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cot g^2 A (\sin^2 A - \sin^2 B) + \cot g^2 B (\sin^2 B - \sin^2 A) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cot g^2 A - \cot g^2 B)(\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$

Do đó, ta có:

- $\cot g^2 A - \cot g^2 B = 0$
  $\cot g^2 A = \cot g^2 B$
  $\cot g A = \pm\cot g B$, chỉ nhận $\cot g A = \cot g B$

(vì nếu $\cot g A = -\cot g B$ thì A và B là 2 góc bù nhau)

Vậy: $A = B$

- Hoặc $\sin^2 A - \sin^2 B = 0$
  $\sin^2 A = \sin^2 B$
  $\sin A = \sin B$ suy ra $A = B$

(Chỉ nhận giá trị dương vì sinA và sinB có giá trị dương)

Vậy ABC là tam giác cân.

Bài 298

Giải phương trình: $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$

Viện Đại học Mở Hà Nội

GIẢI

Điều kiện: $25 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 \leq 25 \Rightarrow x^2 \leq \frac{25}{4} \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

$$\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{25-4x^2} = 0 \\ 3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x = 0 \end{array}\right.$$

* Với $\sqrt{25-4x^2} = 0 \Leftrightarrow 25 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{5}{2}$

* Với $3\sin(2\pi x) + 8\sin\pi x = 0$

$\Leftrightarrow$ $6\sin\pi x\cos\pi x + 8\sin\pi x = 0$

$\Leftrightarrow$ $2\sin\pi x(3\cos\pi x + 4) = 0$

Vì $3\cos\pi x + 4 > 0$ nên chỉ có $\sin\pi x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\pi x = k\pi$

$\Leftrightarrow$ $x = k \ (k \in Z)$

Với điều kiện (1) ta nhận các nghiệm $x = -2, -1, 0, 1, 2$

Do đó, các nghiệm của phương trình là:

$$\boxed{x = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \pm\frac{5}{2}}$$

Bài 299

Giải phương trình: $\cos x(\cos 4x + 2) + \cos 2x.\cos 3x = 0$

Viện Đại học Mở Hà Nội

GIẢI

Ta có: $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

Phương trình đã cho là:

$\cos x(2\cos^2 2x - 1 + 2) + \cos 2x.\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos x(2\cos^2 2x + 1) + \cos 2x\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow$ $2\cos x\cos^2 2x + \cos x + \cos 2x\cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x(2\cos x\cos 2x + \cos 3x) + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x(2\cos x\cos 2x + 4\cos^3 x - 3\cos x) + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x\cos x(2\cos 2x + 4\cos^2 x - 3) + \cos x = 0$

Đặt cosx làm thừa số chung, ta có:

$$\cos x[\cos 2x(2\cos 2x + 4\cos^2 x - 3) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x[\cos 2x(2\cos 2x + 2 + 2\cos 2x - 3) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x[\cos 2x(4\cos 2x - 1) + 1] = 0$$

- Với $\cos x = 0$ ta có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $\cos 2x[(4\cos 2x - 1)] + 1 = 0$

  $4\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$

  có $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ (vô nghiệm)

Bài 300

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu các góc A, B, C của nó thoả mãn: $\sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} = \frac{3}{64}$

Viện Đại học Mở (1997,A)

GIẢI

Áp sụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số $\sin^6\frac{A}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^6$, ta có:

$$\sin^6\frac{A}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3\sqrt[3]{\sin^6\frac{A}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{3}{16}\sin^2\frac{A}{2} \qquad (1)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\sin^6\frac{B}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3\sqrt[3]{\sin^6\frac{B}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{3}{16}\sin^2\frac{B}{2} \qquad (2)$$

$$\sin^6\frac{C}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3\sqrt[3]{\sin^6\frac{C}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{3}{16}\sin^2\frac{C}{2} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$\sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} + \frac{6}{64} \geq \frac{3}{16}\left(\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right) \qquad (4)$$

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi $\sin^6\frac{A}{2} = \sin^6\frac{B}{2} = \sin^6\frac{C}{2}$ tức: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ và ABC là tam giác đều.

Ta tính: $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$

Biết $\quad \cos A + \cos B + \cos C + \cos\frac{\pi}{3} = T + \cos\frac{\pi}{3}$

$$T + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\leq 2\left[\cos\frac{A+B}{2} + \cos\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

(vì $\cos\frac{A-B}{2}$ và $\cos\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \leq 1$)

$$\leq 2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B+C}{2}+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B-C}{2}-\frac{\pi}{6}}{2}\right) \leq 4\cos\frac{\pi}{3} \qquad (5)$$

Suy ra $\quad \cos A + \cos B + \cos C \leq 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

Ta có:

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Do đó, từ (4) ta có: $\quad \sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} + \frac{6}{64} \geq \frac{3}{16}.\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} \geq \frac{3}{64}$$

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi A = B = C và tam giác ABC là đều thì ta có: $\sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2} = \frac{3}{64}$

ĐỀ THI NĂM 1998

Bài 301

Giải phương trình: $\quad \sqrt{3}\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

Đ.H. An ninh (1998)

GIẢI

Điều kiện $\cos x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Chia 2 vế của phương trình cho cosx ≠ 0, ta có:

$$\sqrt{3}\text{tg}x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,\text{tg}x + 1 = 1 + \text{tg}^2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}^2x - \sqrt{3}\,\text{tg}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}x(\text{tg}x - \sqrt{3}) = 0$$

- Với $\text{tg}x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $\text{tg}x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 302

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = \sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x}$

Đ.H. An Ninh

GIẢI

Ta có: $y = \sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$y^2 = (\sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x})^2 \le (\sin^2x + \cos^2x)(\cos x + \sin x)$$

$$y^2 \le \cos x + \sin x$$

$$\le \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$$

Suy ra $y \le \sqrt[4]{2}$

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $y = 2\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[4]{2}$

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số y là: $\boxed{\sqrt[4]{2}}$

Bài 303

Chứng minh rằng nếu ba góc A, B, C của một tam giác thoả mãn điều kiện: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$. **Thì ba góc A, B, C là nhọn**

Đại học An Ninh

GIẢI

Biến đổi vế trái bằng cách áp dụng

n$\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$; $\sin^2 B = \dfrac{1-\cos 2B}{2}$, ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$
$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$$
$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$$
$$= 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$$
$$= 2 + \cos C(\cos(A-B) - \cos C)$$
$$= 2 + \cos C(\cos(A-B) + \cos(A+B))$$
$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

Nếu các góc A, B, C đều nhọn thì $\cos A.\cos B.\cos C > 0$ do đó:

$$2 + 2\cos A\cos B\cos C > 2 \text{ và } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$$

Nếu ΔABC vuông thì $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

Nếu ΔABC có một góc tù thì $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$.

Bài 304

Giải phương trình: $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$

Đ.H. An ninh

GIẢI

Ta có: $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$

$$\sin x\cos x + \cos x + \sin x = 1 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \le \sqrt{2}$ ta suy ra:

$$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$$

Do đó (1) là $\dfrac{t^2-1}{2} + t = 1$ hay $t^2 + 2t - 3 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm $t = 1$ và $t = -3$ (loại vì $t > -\sqrt{2}$)

Với $t = 1$ thì $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Các nghiệm số là: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ và $\boxed{x = 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 305

Trong tất cả các tam giác có chu vi cho trước, hãy định ra tam giác có tổng các lập phương các cạnh của tam giác là bé nhất.

Đ.H. An ninh – Cảnh sát

GIẢI

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$(a + b + c)^2 \le (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

(a, b, c là ba cạnh của tam giác, chu vi là $2p = a + b + c$)

Bình phương 2 vế của phương trình (có 2 vế đều dương), ta có:

$$(a + b + c)^4 \le 9(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$\le 9\left(\sqrt{a}\sqrt{a^3} + \sqrt{b}\sqrt{b^3} + \sqrt{c}\sqrt{c^3}\right)^2$$

$$\le 9\left[\left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}\right)\right]\left[\left(\sqrt{a^3}\right)^2 + \left(\sqrt{b^3}\right)^2 + \left(\sqrt{c^3}\right)^2\right]$$

$$\le 9(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

Do đó suy ra: $a^3 + b^3 + c^3 \ge \frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c)}$

$$\ge \frac{(a+b+c)^3}{9} \qquad \Rightarrow S_{min} = \frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c suy ra tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 306

Giải phương trình: $|\sin x - \cos x| + 2\sin 2x = 1$

Đ.H. An ninh

GIẢI

Đặt $t = |\sin x - \cos x|$; $0 \le t \le \sqrt{2}$

Suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$

$= 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Phương trình đã cho: $|\sin x - \cos x| + 2\sin 2x = 1$ với ẩn số t trở thành:

$$t + 2(1 - t^2) - 1 = 0 \qquad (0 \le t \le \sqrt{2})$$

Hay $-2t^2 + t + 1 = 0$ suy ra $t = 1$ và $t = -\frac{1}{2}$ (loại)

Với $t = 1$, ta có:

$$|\sin x - \cos x| = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin x\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0$$

Các nghiệm số là: $2x = k\pi$,

$$\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}, k \in Z$$

Bài 307

Tính các góc của tam giác ABC biết: $\dfrac{\sin A}{1} = \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin C}{2}$

Đại học An ninh

GIẢI

Từ hệ thức: $\dfrac{\sin A}{1} = \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sin C}{2}$

Ta suy ra $\sin B = \sqrt{3}\sin A$; $\sin C = 2\sin A$.

Trong tam giác, ta có: $\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \sin C\cos B$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A = \sqrt{3}\sin A\cos C + 2\sin A\cos B$$

Suy ra: $\sqrt{3}\cos C + 2\cos B = 1$ (1)

Tương tự: $\sin B = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \sin C\cos A$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\sin A = \sin A\cos C + 2\sin A\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos C + 2\cos A = \sqrt{3} \qquad (2)$$

Và $\sin C = \sin(A + B) = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

$$2\sin A = \sin A\cos B + \sqrt{3}\sin A\cos A$$

$$\cos B + \sqrt{3}\cos A = 2 \qquad (3)$$

Do đó, ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{3}\cos C + 2\cos B = 1 & (1) \\ \cos C + 2\cos A = \sqrt{3} & (2) \\ \cos B + \sqrt{3}\cos A = 2 & (3) \end{cases}$

Giải hệ phương trình này, ta được $A = 30^0$; $B = 60^0$; $C = 90^0$

Tam giác ABC là tam giác vuông góc tại C.

Bài 308

Giải phương trình lượng giác: $\dfrac{1}{\text{tg}x + \text{cotg}2x} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\text{cotg}x - 1}$

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (1998)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \text{cotg}x - 1 \neq 0 \\ \text{tg}x + \text{cotg}2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Phương trình đã cho là: $\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\dfrac{\cos x}{\sin x} - 1}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2x \cos x}{\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x} = \sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x = \sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$$

Vì $\sin x \neq 0$ nên $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Do đó, các nghiệm số là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (loại)

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 309

Hai góc A, B của tam giác ABC thoả mãn điều kiện: $\text{tg}\dfrac{A}{2} + \text{tg}\dfrac{B}{2} = 1$

Chứng minh rằng: $\dfrac{3}{4} < \text{tg}\dfrac{C}{2} < 1$

Đại học Bách Khoa

GIẢI

Trong tam giác $\frac{A+B}{2}$ và $\frac{C}{2}$ là hai góc phụ nhau. Ta có:

$$tg\frac{C}{2} = cotg\frac{A+B}{2} = \frac{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}} = 1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} \text{ (vì } tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} = 1)$$

Vì $\frac{A}{2}$; $\frac{B}{2}$ trong tam giác ABC là góc nhọn, $tg\frac{A}{2}$ và $tg\frac{C}{2}$ có giá trị cương nên: $1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} < 1$ vậy $tg\frac{C}{2} < 1$.

Với hai số dương $tg\frac{A}{2}$ và $tg\frac{B}{2}$, theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\sqrt{tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}} \le \frac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

Bình phương hai vế: $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} \le \frac{1}{4}$

Do đó $tg\frac{C}{2} = 1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} \ge 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi: $tg\frac{A}{2} = tg\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$

Bài 310

Biện luận theo tham số a về số nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{2 - x^2}\sin x + \sqrt{2 + x^2}\cos x = |a+1| + |a-1|$$

Đại học Bách khoa

GIẢI

Điều kiện: $2 - x^2 \ge 0$ suy ra $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Với sinx và cosx thì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Phương trình có dạng asinx + bcosx = c nên để phương trình: $\sqrt{2-x^2}\sin x + \sqrt{2+x^2}\cos x = |a+1| + |a-1|$ có nghiệm thì:

$$\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2+x^2}\right)^2 \geq \left(|a+1| + |a-1|\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \geq 2a^2 + 2 + 2|a^2 - 1|$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - a^2 \geq |a^2 - 1|$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq a \leq 1 \qquad (1)$$

Vế trái, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$\left(\sqrt{2-x^2}\sin x + \sqrt{2+x^2}\cos x\right)^2 \leq \left[\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2+x^2}\right)^2\right](\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= (2 - x^2 + 2 + x^2)$$

$$= 4$$

Suy ra $\quad \sqrt{2-x^2}\sin x + \sqrt{2+x^2}\cos x \leq 2$

a/ Nếu $|a| > 1$ thì vế phải > 2 còn vế trái ≤ 2 nên phương trình vô nghiệm.

b/ Nếu $|a| \leq 1$ thì vế phải = 2, vế trái ≤ 2, để phương trình có nghiệm thì vế trái và vế phải = 2.

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sqrt{2-x^2}\sin x + \sqrt{2+x^2}\cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sin x} = \frac{\sqrt{2+x^2}}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2-x^2}{2+x^2}} = \text{tg}x \qquad (1)$$

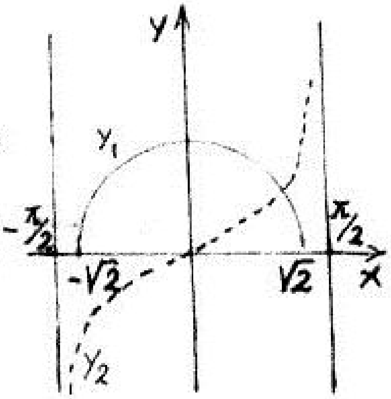
Với $-\sqrt{2} \leq x < 0$ thì (1) vô nghiệm, do 2 vế trái dấu.

Với $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ thì vế phải của (1) là hàm đồng biến vế trái là hàm nghịch biến nên phương trình có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} \text{Xét } \dfrac{2-x^2}{2+x^2} = \dfrac{4}{2+x^2} - 1 \text{ nghịch biến trên } [0, \sqrt{2}] \\ \text{Hoặc tính đạo hàm } f'(x) = \left(\sqrt{\dfrac{2-x^2}{2+x^2}} - \text{tg}x\right)' = \dfrac{-4x}{(x^2+2)^2\sqrt{\dfrac{2-x^2}{2+x^2}}} - \dfrac{1}{\cos^2 x} < 0 \end{cases}$$

Cách khác: Giải bằng đồ thị:

Vẽ đồ thị hàm số: $y=\sqrt{\dfrac{2-x^2}{2+x^2}}$ và y = tgx, ta thấy 2 đồ thị cắt nhau tại một điểm duy nhất trong $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$



Bài 311

Giải phương trình: **sin4x − cos4x = 1 + 4(sinx − cosx)**

Học viện Công nghệ Bưu chính viễn thông (1998)

GIẢI

Ta có: $\sin4x-\cos4x=1+4(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow \sin4x=1+\cos4x+4(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow 2\sin2x\cos2x=2\cos^2 2x-4(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow 2\cos2x(\cos2x-\sin2x)-4(\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos^2x-\sin^2x)(\cos2x-\sin2x)-2(\cos x-\sin x)=0$

Đặt (cosx − sinx) làm thừa số chung:

$(\cos x-\sin x)((\cos x+\sin x)(\cos2x-\sin2x)-2)=0$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-2\right]=0$$

Với cosx−sinx=0 suy ra tgx=1, nghiệm số $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}$ (k∈Z)

Với $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2=0$

$$\cos3x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos3x=1 & (1)\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$$

Với $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1$ có nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ thì $3x=-\frac{3\pi}{2}+6k\pi$

Suy ra cos3x ≠ 0 trái với (1). Do đó hệ vô nghiệm.

Bài 312

Giải phương trình: $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2}} = \text{tg}^2\dfrac{x}{2}$

Đ.H Công đoàn (1998)

GIẢI

Ta biến đổi mẫu số trước để tìm điều kiện:

Biết $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Nên $\sin^2 x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2}$

$$= 4\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right) = -4\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$= -4\cos^4\frac{x}{2}$$

Điều kiện $\sin^2 x - 4\cos^2\dfrac{x}{2} \neq 0$ thì $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$

suy ra $x \neq \pi + 2k\pi$

Từ phương trình đã cho ta có:

$$\frac{\sin^2 x - 2}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2}} = \text{tg}^2\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2 x - 2}{4\cos^2\frac{x}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2} - 1\right)} = \text{tg}^2\frac{x}{2}$$

Suy ra: $\dfrac{\sin^2 x - 2}{-4\cos^4\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2 - \sin^2 x}{4\cos^2\frac{x}{2}} = \sin^2\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \sin^2 x = 4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 1$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = 1$$

Suy ra $\cos 2x = -1$

$$2x = \pi + 2k\pi \quad \text{nghiệm} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 313

> **Chứng minh rằng trong tất cả các tam giác nội tiếp đường tròn cho trước thì tam giác đều có diện tích lớn nhất.**
>
> **Đại học Công đoàn (1998)**

GIẢI

Gọi các cạnh tam giác là a, b, c; diện tích tam giác là S và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Ta có:

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R}$$

$$= 2R^2\sin A.\sin B.\sin C \qquad (1)$$

Từ bất đẳng thức Cô si ta suy ra:

$$\sin A\sin B\sin C \le \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$$

Từ (1) ta suy ra: $S \le 2R^2\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3$ (2)

Ta tính giá trị lớn nhất của $\sin A + \sin B + \sin C$

Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^0$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C+60^0}{2}\cos\frac{C-60^0}{2}$$

$$\le 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin\frac{C+60^0}{2}$$

$$\le 2\left(\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C+60^0}{2}\right)$$

$$\le 2.2\sin\left(\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+60^0}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{C+60^0}{2}}{2}\right)$$

$$\le 4\sin\frac{A+B+C+60^0}{4}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^0 \le 4\sin 60^0$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta có:

$$S \le 2R^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{3.2}\right)^3 = 2R^2\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\cos\frac{A-B}{2} = 1$; $\cos\frac{C-60^0}{2} = 1$; $\cos\frac{A+B-C-60^0}{2} = 1$; $\Leftrightarrow A = B = C$. Vậy tam giác nội tiếp đường có diện tích lớn nhất $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ khi ABC là tam giác đều.

Bài 314

Cho phương trình: $\dfrac{m\sin x - 2}{m - 2\cos x} = \dfrac{m\cos x - 2}{m - 2\sin x}$

1. Giải phương trình khi m = 2

2. Khi $m \neq 0$ và $m \neq \pm\sqrt{2}$ phương trình có bao nhiêu nghiệm nằm trong đoạn $20\pi \le x \le 30\pi$?

Đ.H. Cần Thơ (1998)

GIẢI

1. Khi m = 1 ta có phương trình: $\dfrac{\sin x - 2}{1 - 2\cos x} = \dfrac{\cos x - 2}{1 - 2\sin x}$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq \frac{1}{2} \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{và} \quad x \neq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

Từ (1) ta suy ra: $(\sin x - \cos x)(5 - 2(\sin x + \cos x)) = 0$

Với $\sin x - \cos x = 0$ ta suy ra $\text{tg}x = 1$ và $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Với $5 - 2(\sin x + \cos x) = 5 - 2.\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ nên phương trình vô nghiệm.

2. Khi $m \neq 0$ và $m \neq \pm\sqrt{2}$ phương trình (1) tương đương

$$\begin{cases} m - 2\cos x \neq 0 \\ m - 2\sin x \neq 0 \\ (\sin x - \cos x)\left[(m^2 + 4) - 2m(\sin x + \cos x)\right] = 0 \end{cases}$$

- Với $\sin x - \cos x = 0$, ta có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, nghiệm này thoả mãn điều kiện $m \neq 0$ và $m \neq \pm\sqrt{2}$

Nghiệm x nằm trong đoạn $(20\pi, 30\pi)$, ta phải có:

$$20\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 30\pi$$

$$20 - \frac{1}{4} \leq k \leq 30 - \frac{1}{4}$$

$$19 + \frac{3}{4} \leq k \leq 29 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = 20, 21, ..., 29.$$

Vậy trên $(20\pi, 30\pi)$ phương trình có $\boxed{\text{10 nghiệm số}}$

Với $(m^2 + 4) - 2m(\sin x + \cos x) = 0$ (2)

$$\sin x + \cos x = \frac{m^2 + 4}{2|m|} \geq \frac{4|m|}{2|m|} = 2$$

Vế trái $\leq \sqrt{2}$ vì $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Vế phải ≥ 2 nên phương trình (2) vô nghiệm.

Bài 315

1. Giải phương trình lượng giác: $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$

2. Cho tam giác ABC với BC = a ; CA = b ; AB = c. Chứng minh rằng $2b = a + c$ khi và chỉ khi $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2} = 3$

Đại học Cần Thơ

GIẢI

1. Ta có: $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$

$\Leftrightarrow \quad 3 - 4(1 - \sin^2 x) = \sin x(2\sin x + 1)$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 x - 1 = \sin x(2\sin x + 1)$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(\sin x - (2\sin x + 1)) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(1 - \sin x) = 0$

- Với $2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ ta có nghiệm: $\left[\boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}}\right.$ $(k \in Z)$

- Với $1 - \sin x = 0$

$\sin x = 1$ ta có nghiệm: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Ta có: $2b = a + c$

$\Leftrightarrow$ $4R\sin B = 2R(\sin A + \sin C)$

$\Leftrightarrow$ $2\sin B = \sin A + \sin C$

$\Leftrightarrow$ $4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\Leftrightarrow$ $3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$

Hay $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2} = 3$

Bài 316

Giải phương trình: $\dfrac{\cos\frac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1 - tg^2 x}} = 0$

Đ.H. Dược Hà Nội

GIẢI

Điều kiện: $1 - tg^2x > 0$

$\Leftrightarrow$ $1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} > 0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} > 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi \quad \text{với} \quad x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$$

Ta có: $\dfrac{\cos\frac{4x}{3} - \cos^2 x}{\sqrt{1-tg^2x}} = 0$

Suy ra: $\cos\frac{4x}{3} - \cos^2x = 0$

$$\cos\frac{4x}{3} = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad (1)$$

Đặt $t = \frac{2x}{3}$ thì $\cos\frac{4x}{3} = \cos 2t$ và $\cos 2x = \cos 3\left(\frac{2x}{3}\right) = \cos 3t$

Phương trình (1) trở thành: $\cos 2t = \dfrac{1+\cos 3t}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2t = 1 + \cos 3t$

$\Leftrightarrow \quad 2(2\cos^2t - 1) = 1 + 4\cos^3t - 3\cos t$

Khai triển và rút gọn, ta được:

$4\cos^3t - 4\cos^2t - 3\cos t + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos t - 1)(4\cos^2t - 3) = 0$

- Với $\cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = \cos\frac{2x}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 2k\pi$

  $\Leftrightarrow \boxed{x = 3k\pi}\ (k \in Z)$

- Với $4\cos^2t - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\dfrac{1+\cos 2t}{2} = 3 \Leftrightarrow 2 + 2\cos 2t = 3$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2t = \dfrac{1}{2}$

$\cos\dfrac{2x}{3} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad$ (loại)

Bài 317

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh và A, B, C là các góc của tam giác ABC S là diện tích tam giác. Chứng minh:

$$\text{cotgA} + \text{cotgB} + \text{cotgC} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Đ.H. Dược Hà Nội (1998)

GIẢI

Theo định lý hàm số cos ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\sin A\,\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\,\mathrm{cotg}A \qquad (1)\quad (\text{vì } S = \tfrac{1}{2}bc\sin A)$$

Tương tự: $b^2 = a^2 + c^2 - 4S\,\mathrm{cotg}B \qquad (2)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 4S\,\mathrm{cotg}C \qquad (3)$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4S(\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C)$$

$$0 = a^2 + b^2 + c^2 - 4S(\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C)$$

Suy ra: $\quad \mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

Bài 318

Với $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ chứng minh $2^{2\sin x} + 2^{\mathrm{tg}x} > 2^{2^{\frac{3}{2}x+1}}$

Đ.H. Dược Hà Nội

GIẢI

Với $\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì sinx và tgx đều có giá trị dương

Ta có: $\quad 2^{2\sin x} + 2^{\mathrm{tg}x} \geq 2\sqrt{2^{2\sin x}.2^{\mathrm{tg}x}} = 2\sqrt{2^{2\sin x + \mathrm{tg}x}}$

$$\geq 2.2^{\frac{2\sin x + \mathrm{tg}x}{2}} = 2.2^{\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{tg}x} \qquad (1)$$

Từ bất đẳng thức cần chứng minh: $2^{2\sin x} + 2^{\mathrm{tg}x} > 2^{2^{\frac{3}{2}x+1}} \qquad (2)$

ta suy ra nếu $2.2^{\sin x + \frac{1}{2}\mathrm{tg}x} > 2^{2^{\frac{3}{2}x+1}}$ thì (2) đúng.

Ta xét hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\mathrm{tg}x - \frac{3}{2}x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Đạo hàm: $\quad f'(x) = \cos x + \dfrac{1}{2\cos^2 x} - \dfrac{3}{2}$

$$= \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{3}{2}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{\cos x}{2}.\frac{\cos x}{2}.\frac{1}{2\cos^2 x}}-\frac{3}{2}=0$$

$f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(x) > f(0)$

Do đó $\sin x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}x - \frac{3}{2}x \geq 0\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$; $2\sin x = \operatorname{tg}x. \Rightarrow \sin x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}x - \frac{3}{2}x > 0\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow 2^{2\sin 2x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}x} > 2^{\frac{3}{2}x} \quad \Rightarrow \quad 2.2^{2\sin x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}x} > 2^{\frac{3}{2}x+1}$$

Bài 319

Giải phương trình: $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$

Đ.H. Đà Nẵng (1998)

GIẢI

Ta có: $3\cos 4x - 2\cos^2 3x = 1$

$\Leftrightarrow \quad 3\cos 4x - (1 + \cos 6x) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos 6x - 3\cos 4x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 2x - 3\cos 2x - 3(2\cos^2 2x - 1) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 2x - 6\cos^2 2x - 3\cos 2x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos 2x - 1)(4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 5) = 0$

Do đó: $\left\{\begin{array}{ll} \cos 2x - 1 = 0 & (1) \\ 4\cos^2 2x - 2\cos 2x - 5 = 0 & (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có nghiệm $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

Phương trình (2) có nghiệm $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{21}}{4}$ ($\cos 2x = \frac{1+\sqrt{21}}{4}$ loại)

$$\boxed{x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{21}}{4}k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 320

Chứng minh rằng tam giác ABC là vuông hoặc cân khi và chỉ khi:

$a\cos B - b\cos A = a\sin A - b\sin B$

Trong đó $a = BC$, $b = AC$ và $c = AB$.

GIẢI

Ta có: $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$

Do đó, hệ thức đã cho là:

$$2R\sin A.\cos B - 2R\sin B.\cos A = 2R\sin^2 A - 2R\sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A.\cos B - \sin B.\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\sin(A - B) = \frac{1-\cos 2A}{2} - \frac{1-\cos 2B}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)$$

$$= \sin(A + B).\sin(A - B)$$

Đặt $\sin(A - B)$ làm thừa số chung:

$$\sin(A - B)[\sin(A + B) - 1] = 0$$

$$\begin{cases} \sin(A - B) = 0 & \text{suy ra} \quad A = B \\ \sin(A + B) = \sin C = 1 & \text{suy ra} \quad C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Do đó, tam giác ABC vuông hoặc cân tại C.

Bài 321

Giải phương trình lượng giác: $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x\sin 2x$

GIẢI

Ta có: $1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos x + 2\cos^2 x = \cos 3x + \cos x - \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos x + 2\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(1 + \cos x) = 0$$

- Với $\cos x = 0$ suy ra: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $1 + \cos x = 0$ hay $\cos x = -1$ suy ra: $\boxed{x = \pi + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 322

1. **Chứng minh: $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$**
2. **Chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC, ta có:**

$$tgA + tgB = 2cotg\frac{C}{2}$$

thì ABC là tam giác cân.

Đ.H. Đà Nẵng (1998, B)

GIẢI

1. Đặt $T = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$ (1)

Nhân 2 vế của (1) với $2\sin\frac{\pi}{7}$, ta có:

$$2T\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{2\pi}{7} - \left(\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\left(\frac{-\pi}{7}\right)\right) + \left(\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{-2\pi}{7}\right)$$

$$= \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{\pi}{7} \quad \text{(2 góc } \frac{3\pi}{7} \text{ và } \frac{4\pi}{7} \text{ bù nhau)}$$

Suy ra $2T = 1$; $\boxed{T = \frac{1}{2}}$

2. Trong tam giác thì $\frac{A+B}{2}$ và $\frac{C}{2}$ là hai góc phụ nhau

Ta có: $\text{tg}A + \text{tg}B = 2\text{cotg}\frac{C}{2} = 2\text{tg}\frac{A+B}{2}$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}A - \text{tg}\frac{A+B}{2} = \text{tg}\frac{A+B}{2} - \text{tg}B$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\left(A - \frac{A+B}{2}\right)}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2} - B\right)}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos B}\right) = 0$$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\sin\frac{A-B}{2} = 0 \\ \cos A = \cos B\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\frac{A-B}{2} = 0 \\ A = B\end{array}\right.$

Do đó tam giác ABC là tam giác cân đỉnh C.

Bài 323

Tìm: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$

Đ.H. Giao thông (1998)

GIẢI

Ta có: $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x} \qquad (1)$$

Chia tử và mẫu của (1) cho x:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\sqrt{3x+4}-2-x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\left[\sqrt{3x+4}-(2+x)\right]\left[\sqrt{3x+4}+(2+x)\right]}{x\left[\sqrt{3x+4}+(2+x)\right]}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2x}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{(3x+4)-(2+x)^2}{x\left[\sqrt{3x+4}+(2+x)\right]}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{-x^2-x}{x\left[\sqrt{3x+4}+(2+x)\right]}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{-x-1}{\sqrt{3x+4}+(2+x)}}=\frac{-1+1}{\dfrac{-1}{4}}=0$$

Chú ý:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}=\frac{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}=\frac{1-(2x+1)}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$=\frac{-2x}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}=\frac{-2}{1+\sqrt{2x+1}}$$

Bài 334

Giải phương trình lượng giác: **$\text{tg}x + \text{cotg}x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$**

Đ.H. Giao thông

GIẢI

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$\sin x \neq 0$

Suy ra $\sin 2x \neq 0$ hay $x \neq \frac{k\pi}{2}$

Từ phương trình đã cho: $\text{tg}x + \text{cotg}x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$ ta có:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sin 2x} = \sin 2x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1}{2}\sin 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 4x - \cos 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

Suy ra: $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $4x - \frac{\pi}{4} = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$

Với $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

Với $4x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$$4x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

Bài 325

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin\frac{2x}{1+x^2} + \cos\frac{4x}{1+x^2} + 1$$

Đ.H. Giao thông

GIẢI

Ta có: $y = \sin\frac{2x}{1+x^2} + \cos\frac{4x}{1+x^2} + 1$

$$= \sin\frac{2x}{1+x^2} + \left(1 - 2\sin^2\frac{2x}{1+x^2}\right) + 1$$

$$= -2\sin^2\frac{2x}{1+x^2} + \sin\frac{2x}{1+x^2} + 2$$

Đặt $t = \frac{2x}{1+x^2}$ thì $-1 \le t \le 1$ $(-1, 1) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \sin(-1) \le \sin t \le \sin 1$

Khi đó: $y = -2\sin^2 t + \sin t + 2$

Đặt $u = \sin t$ ta có:

$f(u) = -2u^2 + u + 2$; $u \in (-\sin 1, \sin 1)$

$f'(u) = -4u + 1$; $f'(u) = 0$ suy ra $u = \frac{1}{4}$

u	$-\sin 1$		$\frac{1}{4}$		$\sin 1$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	$(-2\sin^2 1 - \sin 1 + 2)$	$\nearrow$	$\frac{17}{8}$	$\searrow$	$(-2\sin^2 1 + \sin 1 + 2)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $-2\sin^2 1 - \sin 1 + 2$ hay $2\cos^2 1 - \sin t$ và giá trị lớn nhất của y là $\frac{17}{8}$

Chú ý: Đồ thị của $f(u) = -2u^2 + u + 2$ có hoành độ đỉnh của parabol $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-2)} = \frac{1}{4}$, và tung độ đỉnh $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{17}{8}$

Bài 326

Giải phương trình: $$6 - 4x - x^2 = \frac{5}{\left|\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right|}$$

Đ.H. Giao thông

GIẢI

Ta có: $$6 - 4x - x^2 = \frac{5}{\left|\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right|} \qquad (1)$$

Điều kiện: $\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\sin\frac{2y}{x} \neq 0$

Suy ra: $\frac{2y}{x} \neq k\pi$ hay $\frac{y}{x} \neq \frac{k\pi}{2}$

Vế trái của (1) là hàm số bậc hai $-x^2 - 4x + 6$ có hoành độ đỉnh $\frac{-b}{2a} = -2$ và tung độ đỉnh $\frac{-\Delta'}{a} = \frac{-10}{-1} = 10$ nên vế trái của (1) ≤ 10.

Vế phải $$\frac{5}{\sin\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}} = \frac{5}{\left|\frac{1}{2}\sin\frac{2y}{x}\right|} = \frac{10}{\left|\sin\frac{2y}{x}\right|}$$

Vì $\left|\sin\frac{2y}{x}\right| \leq 1$ nên vế phải ≥ 10

Dấu "=" xảy ra khi: $$\begin{cases} 6 - 4x - x^2 = 10 \\ \dfrac{10}{\left|\sin\frac{2y}{x}\right|} = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \sin\frac{2y}{x} = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \sin y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x = -2 \\ y = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{matrix}} \end{cases} \quad (k \in Z)$$

Cách khác: Phân tích vế trái $6 - 4x - x^2 = 10 - (4 + 4x + x^2)$

$$= 10 - (x + 2)^2 \leq 10$$

Dấu "=" xảy ra khi $x + 2 = 0$ hay $x = -2$; vế phải làm tương tự như trên.

Bài 327

Giải phương trình: $\dfrac{\cot g^2x - tg^2x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$

GIẢI

Ta có: $\dfrac{\cot g^2x - tg^2x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$ (1)

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0$ suy ra $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

Thay $1 + \cos 4x = 2\cos^2 x$ vào vế phải của (1) ta có:

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos 2x} = 16.2\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x}}{\cos 2x} = 32\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\frac{1}{4}\sin^2 2x \cos 2x} = 32\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4.\cos 2x}{\sin^2 2x \cos 2x} = 32\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 8\sin^2 2x\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 2\sin^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 1 - \cos 8x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 8x = 0$$

Suy ra $8x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}} \quad (k \in Z)$$

Nghiệm số này thoả mãn điều kiện của bài toán.

Bài 328

Giải phương trình lượng giác: $2\sin^3 x + \cos 2x = \sin x$

GIẢI

Ta có: $2\sin^3x + \cos2x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^3x - \sin x + \cos2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(2\sin^2x - 1) + \cos2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(-\cos2x) + \cos2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos2x(1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 1 - \sin x = 0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right.$$

Giải ra, ta được: $\left[\boxed{\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\end{array}}\right. \quad (k \in Z)$

Bài 329

Giải phương trình lượng giác: $\sin^2x + \sin^22x + \sin^33x = \dfrac{3}{2}$

GIẢI

Ta có: $\sin^2x + \sin^22x + \sin^33x = \dfrac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2x + 2\sin^22x + 2\sin^33x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - 2\sin^2x) + (1 - 2\sin^22x) + (1 - 2\sin^33x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos2x + \cos4x + \cos6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos4x\cos2x + \cos4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos4x(2\cos2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll}\cos 4x = 0 & \quad (1)\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} & \quad (2)\end{array}\right.$$

Phương trình (1) có nghiệm: $\boxed{x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}} \quad (k \in Z)$

Phương trình (2) có nghiệm: $\boxed{x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi} \quad (k \in Z)$

Bài 330

Giải phương trình lượng giác: $\cos^3x + \sin x - 3\sin^2x\cos x = 0$

GIẢI

Ta có: $\cos^3x + \sin x - 3\sin^2x\cos x = 0$ (1)

Do $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) ta chia (1) cho $\cos^3x$ được:

$$1 + \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - 3\text{tg}^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \text{tg}x.(1 + \text{tg}^2x) - 3\text{tg}^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}^3x - 3\text{tg}^2x + \text{tg}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\text{tg}x - 1)(\text{tg}^2x - 2\text{tg}x - 1) = 0$$

Giải phương trình ta được:

$$\left[\begin{array}{ll}\text{tg}x - 1 = 0 & (2)\\ \text{tg}^2x - 2\text{tg}x - 1 = 0 & (3)\end{array}\right.$$

Phương trình (2) có nghiệm:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

Phương trình (3) có nghiệm:

$\text{tg}x = 1 \pm \sqrt{2}$ nên:

$\boxed{x = \text{arctg}\left(1 + \sqrt{2}\right) + k\pi}$ và $\boxed{x = \text{arctg}\left(1 - \sqrt{2}\right) + k\pi}$

Bài 331

Chứng minh rằng: $16\sin 10^0.\sin 30^0\sin 50^0.\sin 70^0 = 1$

Đ.H. Kỹ thuật Công nghệ TP.HCM. (1998)

GIẢI

Đặt tích $16\sin 10^0.\sin 30^0\sin 50^0.\sin 70^0 = T$, ta có:

$$T = 16\cos 80^0.\cos 60^0\cos 40^0\cos 20^0.\frac{\sin 20^0}{\sin 20^0}$$

$$= 8\cos 80^0.\cos 60^0\cos 40^0\sin 40^0.\frac{1}{\sin 20^0}$$

$$= \frac{4\cos 80^0\cos 60^0\sin 80^0}{\sin 20^0}$$

$$= \frac{4\sin 80^0\cos 80^0\cos 60^0}{\sin 20^0}$$

$$= \frac{2\sin 160^0\cos 60^0}{\sin 20^0} = \frac{2\sin 20^0\cos 60^0}{\sin 20^0} = 2.\frac{1}{2} = 1$$

Bài 332

Cho phương trình: $\sin^2x + (2m - 2)\sin x\cos x - (m + 1)\cos^2x = m$

1) Tìm m để phương trình có nghiệm.

2) Giải phương trình khi m = −2

Đ.H. Kỹ thuật công nghệ TP. HCM. (1998)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^2x + (2m - 2)\sin x\cos x - (m + 1)\cos^2x = m$ (1)

• Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow \sin^2x = 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) trở thành $m = \sin^2x = 1$

$\Rightarrow$ với m = 1 phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (*)

• Xét trường hợ $m \neq 1 \Rightarrow \cos x \neq 0$, chia 2 vế của phương trình (1) cho $\cos^2x \neq 0$ ta được:

$$tg^2x + (2m - 2)tgx - (m + 1) = \frac{m}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^2x + (2m - 2)tgx - (m + 1) = m(1 + tg^2x)$$

$$tg^2x + (2m - 2)tgx - (m + 1) = \frac{m}{\cos^2 x} = m(1 + tg^2x)$$

Chuyển vế và rút gọn ta có: $(m - 1)tg^2x - 2(m - 1)tgx + 2m + 1 = 0$ (1)

Để phương trình (1) có nghiệm thì ta phải có:

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' = (m - 1)^2 - (m - 1)(2m + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta' = -m^2 - m + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$-2 \leq m < 1 \qquad (^{**})$$

$\Rightarrow$ từ (*) và (**) để phương trình (1) có nghiệm số ta có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \quad -2 \leq m \leq 1$$

2. Với m = −2 ta có phương trình:

$$\sin^2x - 6\sin x\cos x + \cos^2x = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 6\sin x\cos x = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \qquad (k \in Z)$$

Bài 333

Cho phương trình: $y = \dfrac{5 + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\sin x} = \dfrac{6\text{tg}x}{1 + \text{tg}^2\alpha}$

1. **Giải phương trình với** $\alpha = -\frac{\pi}{4}$
2. **Xác định** α **để phương trình có nghiệm.**

Đ.H. Kiến trúc (1998)

GIẢI

1. Ta có: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha}$ nên $\dfrac{6\text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}^2\alpha} = 3\sin 2\alpha$

Điều kiện $\cos\alpha \neq 0$

Do đó, phương trình đã cho tương đương: $\dfrac{5 - 4\cos x}{\sin x} = 3\sin 2\alpha$ (1)

Điều kiện $\sin x \neq 0$ suy ra $x \neq k\pi$

Với $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ thì $\sin 2\alpha = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ nên (1) trở thành:

$4\cos x - 3\sin x = 5$

$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x = 1$ (2)

Đặt $\cos\beta = \frac{4}{5}$ thì $\sin\beta = \frac{3}{5}$ (vì $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$)

Từ (2) ta có: $\cos\beta\cos x - \sin\beta\sin x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos(\beta + x) = 1 = \cos 0^0$

$\Leftrightarrow \quad \beta + x = 2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = -\beta + 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = -\arccos\frac{4}{5} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Từ (1) ta có: $5 - 4\cos x = 3\sin 2\alpha \sin x$

Hay $4\cos x + (3\sin 2\alpha)\sin x = 5$ (3)

Phương trình (3) có nghiệm khi:

$4^2 + (3\sin 2\alpha)^2 \geq 5^2$

$\Leftrightarrow \quad 16 + 9\sin^2 2\alpha \geq 25$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2\alpha \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2\alpha = 1$ thoả mãn điều kiện $\cos\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

Bài 334

Cho phương trình:

$$m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

1. Giải phương trình với $m = \frac{1}{2}$

2. Xác định m nguyên để phương trình có nghiệm trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Đ.H. Kiến trúc Hà Nội (1998 phân ban)

GIẢI

1.Ta có: $$m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Với $m = \frac{1}{2}$ ta có:

$$\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\right) = 0 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \quad (|t| \leq \sqrt{2})$

Suy ra $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Khi đó (1) trở thành: $$\frac{1}{2}t + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 + t}{\frac{t^2 - 1}{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}t + 1 + \frac{1}{t - 1} = 0 \; ; (t \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + t = 0 \text{ suy ra } t = 0 \text{ và } t = -1 \text{ (loại)}$$

- Với $t = 0$, ta có: $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có:

$$m(\sin x + \cos x) + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow mt + 1 + \frac{1}{t-1} = 0 \qquad t \neq \pm 1$$

$$\Leftrightarrow (mt + 1)(t - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow mt^2 - (m - 1)t = 0 \qquad (1)$$

Giải ra, ta được $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{m-1}{m} \end{array}\right.$ (2)

- Với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$1 < \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$1 < t \leq \sqrt{2} \qquad (3)$$

Thế (2) vào (3) ta có: $1 < \frac{m-1}{m} \leq \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < 1 - \frac{1}{m} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < -\frac{1}{m} \leq \sqrt{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -m \geq \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad -m \geq \sqrt{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leq -(\sqrt{2} + 1)$$

Do đó, các giá trị nguyên của m là: $\boxed{m = -3, -4, -5...}$

Bài 335

Giải phương trình: $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \frac{1}{16}$

Đ.H. Kinh tế Quốc dân Hà Nội (1998)

GIẢI

Điều kiện: $x \neq m\pi \ (m \in Z)$

Nhân vế trái $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$ với $16\sin x \ (\neq 0)$, ta có:

$$\begin{aligned} &16\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x \\ &= 8\sin 2x.\cos 2x\cos 4x.\cos 8x \\ &= 4\sin 4x\cos 4x.\cos 8x \\ &= 2\sin 8x.\cos 8x \\ &= \sin 16x \end{aligned}$$

Do đó, phương trình đã cho tương đương:

$$\sin 16x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16x = \pi + k2\pi \\ 16n = \pi - x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2k\pi}{15} \\ x = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{2k\pi}{17} \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Phải loại trường hợp $x_1, x_2 = m\pi$

$x_1 = m\pi$ khi $\frac{2k\pi}{15} = m\pi \Leftrightarrow k = \frac{15m}{2} = 7m + \frac{m}{2}$,

vì m nguyên nên $\frac{m}{2} = p \in Z \Rightarrow k = 14p + p = 15p$

$x_2 = n\pi$ khi $\frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17} = n\pi \Leftrightarrow k = \frac{17n-1}{2} = 8n + \frac{n-1}{2}$ vì $n \in Z$

nên $\frac{n-1}{2} = q \in Z \Rightarrow n = 2q+1 \Rightarrow k = 8(2q+1) + q = 17q+8$

Vậy phải chọn hai nghiệm x_1 và x_2 với $k \neq 15p$ và $k \neq 17q + 8$

Bài 336

Chứng minh rằng, ABC là tam giác tù khi và chỉ khi:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$$

GIẢI

Ta cần chứng minh: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$ (1)

Ta có: $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C$

$$= \frac{1}{2}(1+\cos2A) + \frac{1}{2}(1+\cos2B) + \cos^2C$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos2A + \cos2B) + \cos^2C$$
$$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2C$$
$$= 1 - \cos C\cos(A-B) + \cos^2C$$
$$= 1 - \cos C(\cos(A-B) - \cos C)$$
$$= 1 - \cos C(\cos(A-B) + \cos(A+B))$$
$$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$$

Do đó (1) cho bất đẳng thức tương đương:

$$1 - 2\cos A\cos B\cos C > 1 \qquad (2)$$

(2) đúng thì $\cos A.\cos B.\cos C < 0$, do đó trong 3 số $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ có ít nhất một số âm, tức là ba góc A, B, C có ít nhất một góc tù.

Bài 337

Tam giác ABC tuỳ ý có cả 3 góc đều nhọn. Xác định giá trị nhỏ nhất của tích: $P = \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$

Đại học Dân lập Hùng vương

GIẢI

Ba góc của tam giác đều nhọn nên tgA, tgB, tgC có giá trị dương. Ta có:

$$\text{tg}(A+B) = \frac{\text{tg}A + \text{tg}B}{1-\text{tg}A\text{tg}B} = \text{tg}(\pi - C) = -\text{tg}C$$

Do đó: $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$

Với ba số dương tgA, tgB, tgC theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \ge 3\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C \ge 3\sqrt[3]{\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^3 \ge 27\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$$
$$(\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C)^2 \ge 27$$

Suy ra $\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C = P \ge \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Bài 338

Cho phương trình: cosx + msinx = 2

a/ Giải phương trình với m = [illegible].

b/ Xác định các giá trị của m để phương trình có nghiệm.

Đ.H. Dân lập Hùng vương (1998)

GIẢI

a/ Với $m = \sqrt{3}$, ta có phương trình: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x\sin\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\ \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$$

b/ Phương trình: cosx + msinx = 2 muốn có nghiệm thì phải có:

$$1^2 + m^2 \geq 2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 \geq 2^2 - 1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad |m| \geq \sqrt{3}$$

Các giá trị của m để phương trình có nghiệm là: $\boxed{|m| \geq \sqrt{3}}$

Bài 339

Xác định m để bất phương trình sau đây vô nghiệm:

$$\sqrt{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq m$$

Đ.H. Dân lập Lạc Hồng (1998)

GIẢI

Ta có: $\sqrt{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x \geq m$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin 2x \geq m$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \geq m - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x \geq \frac{2m - \sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{2m - \sqrt{3}}{2}$$

Bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{2m - \sqrt{3}}{2} > 1$

Từ đó suy ra: $\boxed{m > \frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$

Bài 340

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông hoặc cân khi và chỉ khi

acosB − bcosA = asinA − bsinB

GIẢI

- Trong tam giác ta có: a = 2RsinA và b = 2R sinB (1)

Thế các giá trị a và b ở (1) vào hệ thức: acosB − bcosA = asinA − bsiinB

$$\Leftrightarrow \quad 2R\sin A\cos B - 2R\sin B\cos A = 2R\sin^2 A - 2R\sin^2 B$$

Hay $\sin A\cos B - \sin B\cos A = \sin^2 A - \sin^2 B$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = (\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) = \sin(A + B).\sin(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B)(1 - \sin(A + B)) = 0$$

Khi sin(A−B) = 0 thì A=B, ta có tam giác cân, sin(A+B)=1thì ΔABC vuông.

Bài 341

1. Tìm $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{2}{\sin 2x} - \cot gx\right)$

2. Giải phương trình: $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = 4$

Đ.H. Luật Hà Nội (1998)

GIẢI

1. Tìm $\underset{\rightarrow}{}\left(\frac{}{2x} - \cot gx\right)$

Ta có: $\frac{2}{\sin 2x} - \cot gx = \frac{2}{2\sin x\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin 2x} - \cot gx\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \boxed{0}$

2. Ta có: $(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) = 49 - 48 = 1$

Nên $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{7+4\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$

Suy ra: $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = \left(\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}\right)^{\cos x} = \frac{1}{\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}}$

Đặt: $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = t > 0$, ta có phương trình:

$$t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có 2 nghiệm $t = 2 \pm \sqrt{3}$ (đều >0)

- Do đó: $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x} = t = 2+\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}\right)^{\cos x} = (2+\sqrt{3})^{\cos x} = (2+\sqrt{3}) \Leftrightarrow \cos x = 1$$

- Với $t = 2-\sqrt{3}$ ta có:

$$\left(\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}\right)^{\cos x} = (2-\sqrt{3})^{-\cos x} = (2-\sqrt{3}) \Leftrightarrow \cos x = -1$$

Như vậy $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$ nghiệm số: $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 342

Giải phương trình lượng giác:

$$\mathbf{tgx - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) = 0}$$

Đ.H. Luật Hà Nội (1998)

GIẢI

Ta có: $\quad tgx - \sin 2x - \cos 2x + 2\left(2\cos x - \dfrac{1}{\cos x}\right) = 0 \qquad (1)$

Điều kiện: $\cos x \neq 0$ suy ra $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Từ (1) ta suy ra: $\quad \dfrac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x\cos x - \cos 2x + 2\left(\dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin x}{\cos x}(1 - 2\cos^2 x) - \cos 2x + 2\dfrac{\cos 2x}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sin x}{\cos x}(-\cos 2x) - \cos 2x + \dfrac{2\cos 2x}{\cos x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{-\cos 2x}{\cos x}(\sin x + \cos x - 2) = 0$

Do đó: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{-\cos 2x}{\cos x} = 0 \\ \sin x + \cos x - 2 = 0 \end{array}\right.$

- Với $\dfrac{\cos 2x}{\cos x} = 0$ thì $\cos 2x = 0$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

- Với $\sin x + \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = 2 \qquad (2)$

Biết $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$ nên vế trái của (2) không thể bằng 2, suy ra phương trình vô nghiệm.

Cách khác: Vế phải của (2) bằng 2 nên vế trái, sinx và cosx phải đạt giá trị lớn nhất bằng 1. Nếu sinx = 1 (x = [illegible]) thì cosx = 0, do đó phương trình (2) vô nghiệm.

Bài 343

Cho A, B, C là ba góc trong một tam giác. Tìm các giá trị lớn nhất của biểu thức: $\mathbf{M = 3\cos A + 2(\cos B + \cos C)}$

Đ.H. Luật Hà Nội

GIẢI

Ta có: $M = 3\cos A + 2(\cos B + \cos C)$

$$= 3\cos A + 2\left(2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right) \qquad (1)$$

Biết $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ và $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$ (vì $\frac{B+C}{2}$ và $\frac{A}{2}$ là hai góc phụ nhau) nên từ (1) ta suy ra:

$$M = 3\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

Hay $6\sin^2\frac{A}{2} - 4\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + M - 3 = 0 \qquad (2)$

Đặt $x = \sin\frac{A}{2}$, từ (2) ta có phương trình bậc hai:

$$6x^2 - 4x\cos\frac{B-C}{2} + M - 3 = 0$$

Phương trình này có nghiệm $(\sin\frac{A}{2} = x$ là sin của một góc trong tam giác)

Do đó, $\Delta' = 4\cos^2\frac{B-C}{2} - 6(M-3) \geq 0$

Suy ra: $6(M-3) \leq 4\cos^2\frac{B-C}{2} \leq 4$

$$M - 3 \leq \frac{2}{3}$$

$$M \leq 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

Vậy M đạt giá trị lớn nhất là $\frac{11}{3}$ khi:

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{B-C}{2} = 1 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ x = \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{2\cos(B-C)}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ x = \arcsin\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy: $\boxed{\max M = \dfrac{11}{3}}$

Bài 344

Cho phương trình: $\sin x + m\cos x = 1$ **(1)**

trong đó m là số thực.

a/ Giải phương trình khi $m = -\sqrt{3}$

b/ Tìm tất cả các giá trị của m để mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của phương trình: $m\sin x + \cos x = m^2$ **(2)**

Đ.H. Mỏ – Địa chất (1998)

GIẢI

a/ Khi $m = -\sqrt{3}$ ta có phương trình

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$ $(k \in Z) \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$ $(k \in Z)$

b/ Phương trình (1) cho biết $\forall m$ thì $x = \dfrac{\pi}{2}$ luôn thoả mãn

Do đó để mọi nghiệm của (1) cũng là nghiệm của phương tình (2) $m\sin x + \cos x = m^2$ thì $x = \dfrac{\pi}{2}$ cũng là nghiệm của phương trình (2)

$\Leftrightarrow$ $m + 0 = m^2$ suy ra $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Ngược lại nếu $m = 0$ thì từ (1) ta có $\sin x = 1$

(2) ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$

nên mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2)

Nếu m = 1 thì (1) là $\sin x + \cos x = 1$ và phương trình (2) là $\sin x + \cos x = 1$. Nên hai phương trình (1) và (2) tương đương.

Vậy các giá trị cần tìm của m là $\boxed{m = 0}$; $\boxed{m = 1}$

Bài 345

1. Giải phương trình: $\cos 2x - 7\sin x + 8 = 0$

2. Tính: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{7x^2}$

Đ.H. Mỹ thuật Công nghiệp (1998)

GIẢI

1. Ta có: $\cos 2x - 7\sin x + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x - 7\sin x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + 7\sin x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = \dfrac{-9}{2} < -1 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Với $\sin x = 1$ có nghiệm $\boxed{x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$

2.
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{7x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{7x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{7.4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{14}.1.1 = \boxed{\frac{1}{14}}$$

Bài 346

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu S = p(p – c) trong đó S là diện tích tam giác a, b, c là các cạnh tam giác; p là nửa chu vi tam giác.

Đ.H. Mỹ thuật Công nghiệp

GIẢI

Ta có: $S = p(p - c)$

Suy ra: $S^2 = p^2(p-c)^2$ (1)

Theo công thức Hêrông ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow \quad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$p^2(p-c)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Leftrightarrow \quad p(p-c) = (p-a)(p-b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = \left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - c^2 = (c-(a-b))(c+(a-b))$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = c^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

Do đó: $a^2 + b^2 = c^2$

Vậy ABC là tam giác vuông (vì có bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh kia) vuông tại C.

Bài 347

Giải phương trình: $\mathbf{\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x\cos 2x}$

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội (1998)

GIẢI

Ta có: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin x\cos 2x = \sin 3x + \sin(-x)$

Do đó, phương trình đã cho là: $\sin 3x + 1 - 2\sin^2 x = 1 + \sin 3x - \sin x$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với $\sin x = 0$ có nghiệm số $\boxed{x = k\pi}$ $(k \in Z)$

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ có các nghiệm:

- $\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

- $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$

Bài 348

Cho A, B, C và a, b, c lần lượt là các góc và các cạnh của tam giác BC. Chứng minh rằng: $\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$

Đ.H. Ngoại ngữ Hà Nội

GIẢI

Ta có: $\sin C = \sin(A + B)$

$$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

Và $\quad \sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$

Vế trái của hệ thức: $\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$

Có thể biến đổi thành:

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\sin C.\sin(A-B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 2A)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{(1-\cos 2A) - (1-\cos 2B)}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{2\sin^2 A - 2\sin^2 B}{2\sin^2 C}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2}{\left(\frac{c}{2R}\right)^2}$$

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2-b^2}{c^2} \quad (\text{đpcm})$$

Chú ý: Cũng có thể biến đổi vế phải $\frac{a^2-b^2}{c^2}$ để đến kết quả bằng vế trái $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$

Bài 349

Giải phương trình: $\cos x + \text{tg}\frac{x}{2} = 1$

Viện Đại học Mở Hà Nội (1998)

GIẢI

Ta có: $\cos x + \text{tg}\frac{x}{2} = 1$

Điều kiện : $\cos\frac{x}{2} \neq 0$ suy ra $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in Z$

Biết $\cos x = \dfrac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (đặt $t = \text{tg}\frac{x}{2}$)

Do đó phương trình đã cho là : $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1 \Leftrightarrow t(t-1)^2 = 0$

Phương trình có hai nghiệm: $t = 0$ và $t = 1$

- Với $t = 0$ thì $\text{tg}\frac{x}{2} = 0$ suy ra $x = 2k\pi$ $(k \in Z)$

- Với $t = 1$ thì $\text{tg}\frac{x}{2} = 1$ suy ra $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Bài 350

Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thoả mãn $\text{tg}A.\text{tg}B = \text{cotg}^2\frac{C}{2}$ thì ABC là tam giác vuông hoặc cân

GIẢI

Ta có : $\text{tg}A.\text{tg}B = \text{cotg}^2\frac{C}{2}$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B} = \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{1+\cos C}{1-\cos C}$$

$\Leftrightarrow \sin A\sin B(1-\cos C) = \cos A\cos B(1+\cos C)$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B - \sin A\sin B + \cos C(\cos A\cos B + \sin A\sin B) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(A+B) + \cos C(\cos(A-B)) = 0$

$\Leftrightarrow -\cos C + \cos C(\cos(A-B)) = 0$

$\Leftrightarrow \cos C\left[\cos(A-B) - 1\right] = 0$

Từ đó suy ra , nếu $\cos C = 0$ thì $C = 90^0$, nếu $\cos(A-B) = 1$ thì $A = B$. Vậy tam giác ABC thoả mãn $\text{tg}A.\text{tg}B = \text{cotg}^2\frac{C}{2}$ thì tam giác ABC là vuông hoặc cân

Bài 351

Cho hệ phương trình : $\begin{cases}\sin^2 x + m\,\text{tg}y = m\\ \text{tg}^2 y + m\sin x = m\end{cases}$

1. Giải hệ trên khi m = 1

2. Với giá trị nào của m thì hệ trên có nghiệm

GIẢI

1. Khi $m = 1$, ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\sin^2 x + \text{tg}y = 1 & (1)\\ \text{tg}^2 y + \sin x = 1 & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta có :

$$\sin^2 x - \text{tg}^2 y + \text{tg}y - \sin x = 0$$

$$(\sin x - \text{tg}y)(\sin x + \text{tg}y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x - \text{tg}y = 0\\ \sin x + \text{tg}y - 1 = 0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \text{tg}y\\ \text{tg}y = 1 - \sin x\end{array}\right.$$

Do đó , ta có hai hệ:

a) $\begin{cases}\sin x = \text{tg}y\\ \sin^2 x + \text{tg}y = 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\text{tg}y = 1 - \sin x\\ \sin^2 x + \text{tg}y = 1\end{cases}$

a/ Giải hệ: $\begin{cases} \sin x = tgy & (3) \\ \sin^2 x + tgy = 1 & (4) \end{cases}$

Thế tgy = sinx ở (3) vào (4) ta có : $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm : $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{(loại)} \\ \sin x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

• Với $\sin x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ suy ra: $\left[\boxed{\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi \end{array}}\right.$

(k∈Z)

• Với $tgy = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ suy ra : $\boxed{y = \text{arctg}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + l\pi}$ $(l \in Z)$

b/ Giải hệ: $\begin{cases} tgy = 1 - \sin x & (5) \\ \sin^2 x + tgy = 1 & (6) \end{cases}$

Thay tgy = 1 – sinx vào phương trình (6) ta có :

$$\sin^2 x + 1 - \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right.$$

• Với $\sin x = 0$ suy ra $\boxed{x = k\pi}$ (k∈Z)

$tgy = 1 - \sin x = 1$ suy ra $\boxed{y = \dfrac{\pi}{4} + l\pi}$ (l∈Z)

• Với $\sin x = 1$ suy ra $\boxed{x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi}$ (k∈Z)

$tgy = 1 - \sin x = 0$ suy ra $\boxed{y = l\pi}$

2. Tìm m để hệ có nghiệm

Đặt $\begin{cases} \sin x = u \\ \operatorname{tg} y = v \end{cases}$ với $|u| \le 1$

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} u^2 + mv = m & (7) \\ v^2 + mu = m & (8) \end{cases}$$

Lấy (7) trừ (8) ta được

$$(u-v)(u+v-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v - m = 0 \end{array}\right.$$

Do đó ta có hai hệ:

$$\begin{cases} u = v \\ u^2 + mv = m \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} u + v - m = 0 \\ u^2 + mu = m \end{cases}$$

Giải hệ $\begin{cases} u = v & (a) \\ u^2 + mv = m & (b) \end{cases}$

Thế u = v ở (a) vào (b) ta có $m(1-u) = u^2$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{u^2}{1-u} \qquad (u \ne 1)$$

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{u^2}{1-u}$ với $-1 \le u \le 1$

Đạo hàm $f'(u) = \dfrac{-u^2 + 2u}{(1-u)^2}$

$f'(u) = 0$ suy ra $\left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 2 \end{array}\right.$

u	−1		0		1		2
f'(u)		−	0	+	||	+	0
f(u)	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	+∞ ||		

Giải hệ $\begin{cases} u + v - m = 0 & \text{(c)} \\ u^2 + mv = 0 & \text{(d)} \end{cases}$

⇒ Để hệ phương trình có nghiệm ⇔ $m \geq 0$

$v = m - u$

Thay $v = m - v$ ở (c) vào (d) ta có :

$u^2 + m(m - u) = m$

⇔ $u^2 - mu + (m^2 - m) = 0$

Phương trình có nghiệm khi :

$$\Delta = m^2 - 4(m^2 - m) \geq 0$$

$$= -3m^2 + 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq m \leq \frac{4}{3}$$

Vậy, điều kiện cần để hệ đã cho có nghiệm là $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ và hệ đ

cho có nghiệm với $m \geq 0$

Bài 352

Giải phương trình : $2\cos^2\frac{3x}{2} + 1 = 3\cos 2x$

Đ.H dân lập Ngoại ngữ tin học T.P.HCM.(1998)

GIẢI

Ta có : $2\cos^2\frac{3x}{2} + 1 = 3\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos 3x + 1 = 3\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x - 3\cos x + 2 = 3(2\cos^2 x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x - 6\cos^2 x - 3\cos x + 5 = 0$$

Do đó : $\left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ 4\cos^2 x - 2\cos x - 5 = 0 \end{array}\right.$

- Với $\cos x = 1$ suy ra $\boxed{x = 2k\pi}$ $k \in Z$
- Với $4\cos^3 x - 2\cos x - 5 = 0$

Suy ra $\cos x = \frac{1-\sqrt{21}}{4}$ và $\cos x = \frac{1+\sqrt{21}}{4}$ (loại)

$$\boxed{x = \pm\arccos\left(\frac{1-\sqrt{21}}{4}\right) + 2k\pi}$$

Bài 353

Giải phương trình : $\cos^3x + \sin^3x = \sin x - \cos x$

Đ.H dân lập Ngoại ngữ tin học TP.HCM (1998)

GIẢI

Ta có : $\cos^3x + \sin^3x = \sin x - \cos x$

$\Leftrightarrow \quad \cos^3x + \sin^3x - \sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos^2x + 1) + \sin x(\sin^2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos^2x + 1) + \sin x(-\cos^2x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos^2x - \sin x\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x + 1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos 2x - \sin 2x + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x - \sin 2x + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Với $\cos x = 0$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

và $\cos 2x - \sin 2x + 3 = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 > 0$

Cách khác : Nhân vế phải với $\sin^2x + \cos^2x = 1$

Ta có : $\cos^3x + \sin^3x = (\sin x - \cos x)(\sin^2x + \cos^2x)$

$= \sin^3x + \sin x\cos^2x - \cos x\sin^2x - \cos^2x$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos^3x + \sin x\cos x(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(2\cos^2x + \sin^2x - \sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(2\cos^2x + 1 - \cos^2x - \sin x\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos^2x + 1 - \frac{1}{2}\sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x(\frac{1+\cos 2x}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sin 2x) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(\cos 2x - \sin 2x + 3) = 0$

Kết quả tương tự như cách thứ nhất, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos 2x - \sin 2x + 3 = -\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3 > 0$

Bài 354

Giải phương trình lượng giác: $\cos x \cos 4x + \cos 2x \cos 3x = 0$

Đ.H Ngoại thương cơ sở II (1998, A)

GIẢI

Ta có : $\cos x \cos 4x + \cos 2x \cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x \cos 4x + \cos 2x\,(4\cos^3 x - 3\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos 4x + 4\cos^2 x \cos 2x - 3\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x((2\cos^2 2x - 1) + 2(1 + \cos 2x)\cos 2x - 3\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1) = 0$

Với $\cos x = 0$ suy ra [illegible] $+ k\pi \quad (k \in Z)$

Với $4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1+\sqrt{17}}{8} + k\pi \ (k \in Z) \\ \cos 2x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{8} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1-\sqrt{17}}{8} + k\pi \ (k \in Z) \end{array}\right.$$

Bài 355

Hãy tính các góc của Δ ABC nếu trong tam giác đó ta có :

$$\begin{cases} b^2 + c^2 \le a^2 \\ \sin A + \sin B + \sin C = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

GIẢI

Ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Ta suy ra : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \le 0$ nên góc A là góc tù hay góc vuông $\Rightarrow A \ge 90^0$

Ta có : $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$= \sin A + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le 1 + 2\cos\frac{A}{2}$$

Do $A \geq 90^0$ nên $\frac{A}{2} \geq 45^0$ và $\cos\frac{A}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó $\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $A = 90^0$ và $B = C = 45^0$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông cân .

Bài 356

Giả phương trình lượng giác :

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$$

Đại học Ngoại thương Hà nội (1998)

GIẢI

Ta có $:\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$

Chuyển các số hạng ở vế trái sang vế phải và sắp xếp lại thành những nhóm $\cos x - \sin x$

$(\cos x - \sin x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos^3 x - \sin^3 x) + (\cos^4 x - \sin^4 x) = 0$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x) + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x.\sin x) = 0$

$\Rightarrow (\cos x - \sin x).(1 + 2(\cos x + \sin x) + 1 + \cos x\sin x) = 0$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}\cos x - \sin x = 0\\ 1 + 2(\cos x + \sin x) + 1 + \cos x \sin x = 0\end{array}\right.$

* Với $\cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \text{tg}x = 1$ suy ra $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

* Với $1 + 2(\cos x + \sin x) + 1 + \cos x\sin x = 0$ (1)

Ta đặt: $\cos x + \sin x = t$ $(|t| \leq \sqrt{2})$

Suy ra: $\cos x\sin x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Khi đó phương trình (1) thành:

$$2 + 2t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0$$

$\Rightarrow t^2 + 4t + 3 = 0$ (2)

Phương trình (2) có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l}t = -1\\ t = -3 \quad \text{(loại)}\end{array}\right.$

$t = -1$ thì $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Rightarrow \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{x = \pi + 2k\pi} \text{ và } \boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \ (k \in Z)$$

Bài 357

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{cotg}\frac{A}{2}\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right)$$

Đ.H. N.T. Hà Nội (1998, A)

GIẢI

Hệ thức cần chứng minh:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{cotg}\frac{A}{2}\mathrm{cotg}\frac{B}{2}\mathrm{cotg}\frac{C}{2}\right) \qquad (\ )$$

Biến đổi vế trái, ta có:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} = \frac{\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin^2\frac{C}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{cot\,g}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{cot\,g}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{cot\,g}\frac{C}{2}\right) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra cần phải chứng minh:

$$\mathrm{cot\,g}\frac{A}{2}\mathrm{cot\,g}\frac{B}{2}\mathrm{cot\,g}\frac{C}{2} = \mathrm{cot\,g}\frac{A}{2} + \mathrm{cot\,g}\frac{B}{2} + \mathrm{cot\,g}\frac{C}{2}$$

Trong tam giác thì $\frac{A+B}{2}$ và $\frac{C}{2}$ là hai góc phụ nhau

Ta có: $\mathrm{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}}{1 - \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}} = \mathrm{cot\,g}\frac{C}{2} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\frac{C}{2}}$

Suy ra: $\quad \text{tg}\frac{A}{2} \quad \text{tg}\frac{B}{2}\,\text{tg}\frac{C}{2} \quad 1 \quad \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}$

Hay: $\quad \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1 \qquad (3)$

Nhân 2 vế của (3) với $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$ ta có:

$$\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\left(\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}\right) + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}\left(\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}\right) +$$

$$+\,\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}\left(\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}\right) = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$$

$$\cot g\frac{C}{2} + \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} \qquad (4)$$

Thế (4) vào (2) ta được đẳng thức cần chứng minh.

Bài 358

Giải phương trình lượng giác: $\dfrac{\sin^2 2x + \cos^4 2x - 1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = 0$

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin 2x > 0$

$\Leftrightarrow \quad k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$

Ta có: $\quad \sin^2 2x + \cos^4 2x - 1 = \cos^4 2x - (1 - \sin^2 2x)$

$$= \cos^4 2x - \cos^2 2x$$

$$= \cos^2 2x(\cos^2 2x - 1)$$

$$= \cos^2 2x(-\sin^2 2x)$$

Do đó, phương trình đã cho là:

$$\frac{\sin^2 2x + \cos^4 2x - 1}{\sqrt{\sin x \cos x}} = \frac{\cos^2 2x(-\sin^2 2x)}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 359

Giải phương trình: $$2tgx + cotg2x = 2sin2x + \frac{1}{sin2x}$$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1998, A

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \ (k \in Z)$

Ta có: $2tgx + cotg2x = 2sin2x + \frac{1}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow \quad 2tgx + \frac{1 - tg^2x}{2tgx} = 4sinxcosx + \frac{1}{2\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2tgx + \frac{1}{2}cotgx - \frac{1}{2}tgx = 4sinxcosx + \frac{1}{2\sin x\cos x}$$

Nhân 2 vế với $2sinxcosx \neq 0$, ta được:

$$4sin^2x + cos^2x - sin^2x = 8sin^2xcos^2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3sin^2x + 1 - sin^2x = 8sin^2xcos^2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad sin^2x = 4sin^2xcos^2x$$

$$\Leftrightarrow \quad sin^2x(1 - 4cos^2x) = 0$$

Vì $sinx \neq 0$ nên chỉ có $1 - 4cos^2x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad cos^2x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 360

Chứng minh rằng nếu A, B, C là các góc của một tam giác thì:

$$\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}\le\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)$$

GIẢI

Biết: $\cos3A=4\cos^3A-3\cos A$ suy ra:

$$\cos^3A=\frac{1}{4}(3\cos A+\cos3A)$$

Do đó: $$\cos^3\frac{A}{3}=\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{A}{3}+\cos A\right)\quad(1)$$

$$\cos^3\frac{B}{3}=\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{B}{3}+\cos B\right)\quad(2)$$

$$\cos^3\frac{C}{3}=\frac{1}{4}\left(3\cos\frac{C}{3}+\cos C\right)\quad(3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế ta có:

$$\cos^3\frac{A}{3}+\cos^3\frac{B}{3}+\cos^3\frac{C}{3}=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3}+\cos\frac{B}{3}+\cos\frac{C}{3}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)\quad(4)$$

Thế (4) vào hệ thức đã cho, ta suy ra:

$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{4}(\cos A+\cos B+\cos C)\le\frac{3}{8}\quad(5)$$

Hay $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

Ta có:

$$\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+1$$

$$=-2\left(\sin^2\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+1$$

$$=-2\left[\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]^2+\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+1$$

$$\le\frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+1\le\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

Vậy $\frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C) \le \frac{1}{4}.\frac{3}{2} = \frac{3}{8}$ suy ra:

$$\cos^3\frac{A}{3} + \cos^3\frac{B}{3} + \cos^3\frac{C}{3} \le \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3} + \cos\frac{B}{3} + \cos\frac{C}{3}\right)$$

Bài 361

Giải phương trình: $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1998, B)

GIẢI

Nhân vế trái của phương trình với ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), ta có:

$$(\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x\cos^2 x + \cos^3 x\sin^2 x = \sin^5 x + \cos^5 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos^3 x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^3 x - \cos^3 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ \sin^3 x - \cos^3 x = 0 \end{array}\right.$$

Với $\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}} \ (k \in Z)$$

Với $\sin^3 x - \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x$

$$\Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \ (k \in Z)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $(k \in Z)$

Bài 362

Giả sử các góc A, B, C của tam giác ABC thoả mãn đẳng thức

$\cos A + \cos B + \cos C = 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1998, B)

GIẢI

Hệ thức cần chứng minh:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A)$$

ở đề 360 ta đã chứng minh $\cos A+\cos B+\cos C\leq \frac{3}{2}$

Ta có: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$

$\Leftrightarrow\quad (2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)\geq 0$

$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \qquad (1)$

Cộng $2xy+2yz+2zx$ vào hai vế của (1), ta được:

$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq 3(xy+yz+zx)$

$\Leftrightarrow\quad (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$

$\Rightarrow (\cos A+\cos B+\cos C)^2\geq 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$\Rightarrow \frac{3}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)\geq 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$\Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C\geq 2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}\cos A+\cos B+\cos C=\frac{3}{2}\\ 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)=(\cos A\cos B+\cos C)^2\end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều

Bài 363

Giải phương trình lượng giác: $\sin^2x=\cos^22x+\cos^23x$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội (1998, D)

GIẢI

Dùng công thức hạ bậc: $\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\cos^22x=\frac{1+\cos 4x}{2}$$

Do đó, phương trình: $\sin^2x=\cos^22x+\cos^23x$

trở thành:

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\cos^23x$$

$\Leftrightarrow\quad 2\cos^23x+\cos 4x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow\quad 2\cos^23x+2\cos 3x\cos x=0$

$\Leftrightarrow\quad 2\cos 3x(\cos 3x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow\quad 2\cos 3x.2\cos 2x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{[illegible]} = \\ \text{[illegible]} = \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\ \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 364

Cho A, B, C là các góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 2$$

Đ.H. Quốc gia Hà Nội

GIẢI

Ta có: $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin A + \frac{1}{2}\sin B}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$= \frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= 1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} \qquad (1)$$

Tương tự: $\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} = 1 + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + 1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 2$$

Bài 365

Giải phương trình: $\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 2$

Đ.H. Sư phạm Quy Nhơn (1998)

GIẢI

Tính: $\sin x + \quad \cos x = \sin x + \dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos x$

$$= \frac{\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Đặt $t = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ thì $t \le 2$

Do đó, phương trình đã cho là:

$$t + \sqrt{t} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{t} = 2 - t \text{ thì } 2 - t \ge 0$$

$$\Leftrightarrow t = (2-t)^2 = 4 - 4t + t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \qquad (1)$$

Các nghiệm số của (1) là: $\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

Phương trình có 2 nghiệm là: $\left[\boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Bài 366

Giải các phương trình lượng giác:

1. $3\cos^4 x - 4\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x = 0$

2. $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$

Đ.H. Quốc gia T.P. Hồ Chí Minh (1998)

GIẢI

1. Ta có: $3\cos^4 x - 4\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\cos^4x - 4\cos^2x(1-\cos^2x) + (1-\cos^2x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3\cos^4x - 4\cos^2x + 4\cos^4x + 1 - 2\cos^2x + \cos^4x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 8\cos^4x - 6\cos^2x + 1 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 x = \frac{1}{4}\\ \cos^2 x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{4}\\ \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 2x = -\frac{1}{2} & \text{suy ra}\\ \cos 2x = 0 & \text{suy ra}\end{array}\right. \quad \boxed{\begin{array}{l}x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\end{array}} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có: $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$ (1)

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4}$ thì $x = t + \frac{\pi}{4}$

Suy ra: $\sqrt{2}\sin x = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin t + \cos t$

Do đó (1) trở thành:

$\sin^3 t = \sin t + \cos t$

$\Leftrightarrow \quad \sin t(1 - \sin^2 t) + \cos t = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin t\cos^2 t + \cos t = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos t\left(\frac{1}{2}\sin 2t + 1\right) = 0$

$\cos t = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ suy ra: $\boxed{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

$\frac{1}{2}\sin 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2t = -2$ (vô nghiệm)

Bài 367

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c và số đo các góc là A, B, C. Chứng minh rằng:

1. $ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \geq 0$ **(1)**

2. $\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)} \geq 12$ **(2)**

Đ.H. Quốc gia T.P. HCM. (1998, A)

GIẢI

1. Từ (1) ta có

$$ab(a + b + c - 3c) + bc(b + c + a - 3a) + ca(a + b + c - 3b)$$

$$= ab(a+ b+ c)-3abc+ bc(a + b + c)-3abc +ca(a+ b+ c)-3abc$$

$$= (a + b + c)(ab + bc + ca) - 9abc$$

Do $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Nên $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 9abc$

Do đó: $(a + b + c)(ab + bc + ca) - 9abc \geq 0$ và (1) luôn đúng.

2. Trong tam giác thì $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ và $\frac{C}{2}$ là các góc nhọn nên $\sin\frac{A}{2}$ $\sin\frac{B}{2}$ và $\sin\frac{C}{2}$ có giá trị dương.

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{C}{2}\right)} \geq 3.\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}} \qquad (2)$$

Biết $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ (xem chứng minh ở cuối bài)

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \leq \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6}$$

Do đó vế phải của (2) là:

$$3.\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}} \geq \frac{3}{\frac{1}{\sqrt[3]{2^6}}} = 12$$

ở (1) dấu "=" xảy ra khi a = b = c nên ΔABC là tam giác đều

ở (2) dấu "=" xảy ra khi $\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2}$ do đó ΔABC là tam giác đều.

Chứng minh: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Hay: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{8} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)^2\right] \le 0$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin\frac{A-B}{2} = 0 \Rightarrow A = B$

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\cos 0^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^0$$

Ta suy ra ΔABC là tam giác đều.

Cách khác.

1/ Ta có: $ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \ge 0$

Chia bất đẳng thức cho abc, ta có:

$$\frac{a+b-2c}{c} + \frac{b+c-2a}{a} + \frac{c+a-2b}{b} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{c} - 2 + \frac{b+c}{a} - 2 + \frac{c+a}{b} - 2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 6 \ge 0 \qquad (3$$

Theo bất đẳng thức Cô si thì: $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \ge 2\sqrt{\frac{a}{c}.\frac{c}{a}} = 2$

Tương tự: $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \ge 2$; $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$

Cộng các bất đẳng thức này ta suy ra (3) (đpcm)

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{c} = \frac{c}{a}$; $\frac{b}{c} = \frac{c}{b}$; $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = b = c$

Do đó ABC là tam giác đều.

2. Ta có: $\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{a^2-(b-c)^2}{4ac} \le \frac{a^2}{4bc}$

Suy ra: $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} \ge \frac{4bc}{a^2}$.

Tương tự: $\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} \ge \frac{4ac}{b^2}$; $\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge \frac{4ab}{c^2}$

Dấu "=" khi $(b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow b = c$

Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 4\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}\right) \ge 4.3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}} \ge 12$$

Dấu "=" khi a = b = c và ΔABC là tam giác đều.

Bài 368

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = m + \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

1. **Giải hệ phương trình với m = 0**
2. **Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm?**

Đ.H. Quốc gia T.P. HCM.(1998, D)

GIẢI

1. Ta có: $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = m + \frac{1}{2} & (1) \\ x + y = \frac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} = m + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2} = m - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(y + x)\sin(x - y) = m - \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Với $m = 0$ thì $\sin(y + x)\sin(x - y) = -\frac{1}{2}$

Và $x + y = \frac{\pi}{4}$, suy ra $\sin(x - y) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - y = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right.$$

Hệ đã cho:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi; \quad y = \frac{\pi}{4} - k\pi} \ (k \in Z)$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x - y = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi; \quad y = -\frac{\pi}{2} - k\pi} \ (k \in Z)$$

2. Từ (3) ta có:

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin(x - y) = m - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(x - y) = \sqrt{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)$$

Hệ có nghiệm khi: $-1 \le \sqrt{2}\left(m - \frac{1}{2}\right) \le 1$ suy ra:

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\right) \le m \le \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)}$$

Bài 369

Cho phương trình cos4x + 6sinxcosx = m với m là tham số.

1. Giải phương trình khi m = 1

2. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Đ.H. Quốc gia T.P. HCM. (1998,D)

GIẢI

1. Ta có: cos4x + 6sinxcosx = m

Khi m = 1, suy ra:

$$1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x = 1 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 2x - 3\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x(2\sin 2x - 3) = 0$$

Với $\sin 2x = 0$

$$\Rightarrow \quad 2x = k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$$

Với $2\sin 2x - 3 = 0$ (vô nghiệm, vì $\sin 2x = \frac{3}{2} > 1$)

2. Từ (1) ta có:

$$1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x = m$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 2x - 3\sin 2x + m - 1 = 0 \quad (2)$$

Nếu phương trình (2) có nghiệm $t_1 = \sin 2x$; $t_2 = \sin 2x$

Do $0 \le x \le$

$$\Rightarrow \quad 0 \le t_1, t_2 \le 1$$

$$\begin{cases} \Delta = 9 - 8(m - 1) = 17 - 8m > 0 \\ f(0) = m - 1 \ge 0 \\ f(1) = m - 2 \ge 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{3}{4} < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{2 \le m < \frac{17}{8}}$$

Bài 370

Cho tam giác ABC bất kỳ với ba góc ở đỉnh là A, B, C.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \sqrt{3}\cos B + 3(\cos A + \cos C)$

Đ.H. Sư phạm 2 Hà Nội (1998, A)

GIẢI

Ta có: $P = \sqrt{3}\cos B + 3(\cos A + \cos C)$

$$= \sqrt{3}\cos B + 3.2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$= \sqrt{3}\cos B + 6\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad P \le \sqrt{3}\cos B + 6\sin\frac{B}{2}$$

$$= \sqrt{3}\left(1 - 2\sin^2\frac{B}{2}\right) + 6\sin\frac{B}{2}$$

$$= -2\sqrt{3}\sin^2\frac{B}{2} + 6\sin\frac{B}{2} + \sqrt{3}$$

$$= -2\sqrt{3}\left(\sin\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \le \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Giá trị lớn nhất của P là: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ khi dấu '=' xảy ra.

Do đó phải có:

$$\begin{cases}\cos\frac{A-C}{2} = 1\\ \sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A = C\\ \frac{B}{2} = 60^0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B = 120^0\\ A = C = \frac{60^0}{2} = 30^0\end{cases}$$

Bài 371

Cho tam giác ABC bất kỳ với ba góc ở đỉnh là A, B, C đều nhọn. Chứng minh rằng: $\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C) > \pi$

Đ.H. Sư phạm 2 Hà Nội

GIẢI

Thay $\pi = A + B + C$ vào vế phải của bất đẳng thức, ta có:

$$\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C) > A + B + C$$

Hay: $\left(\frac{2}{3}\sin A + \frac{1}{3}\text{tg}A - A\right) + \left(\frac{2}{3}\sin B + \frac{1}{3}\text{tg}B - B\right) + \left(\frac{2}{3}\sin C + \frac{1}{3}\text{tg}C - C\right) > 0$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\text{tg}x - x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1$$

$$\geq \frac{1}{3}\,3\sqrt[3]{\cos x \cos x \frac{1}{\cos^2 x}} - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ vậy f(x) đồng biến trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $f'(x) > f(0) = 0 \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó: $\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}x - x > 0$

$\Leftrightarrow$ $\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}x > x$ (1)

Với A< B, C là 3 góc nhọn thì $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$

Từ (1) ta suy ra:

$$\frac{2}{3}\sin A + \frac{1}{3}\mathrm{tg}A + \frac{2}{3}\sin B + \frac{1}{3}\mathrm{tg}B + \frac{2}{3}\sin C + \frac{1}{3}\mathrm{tg}C > A + B + C = \pi$$

Bài 372

Giải phương trình: $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi\sin 2x)$

Đ.H. Thái nguyên (1998)

GIẢI

Ta có: $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos(\pi\sin 2x)$

Do đó phương trình đã cho là: $\cos(\pi\cos^2 x) = \cos(\pi\sin 2x)$

$\Leftrightarrow$ $\pi\cos^2 x = \pm\pi\sin 2x + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ $\cos^2 x = \pm\sin 2x + 2k \quad (k \in Z)$ (1)

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \pm\sin 2x + 2k$

$\Leftrightarrow$ $1 + \cos 2x = \pm 2\sin 2x + 4k$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x \pm 2\sin 2x = 4k - 1$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm là:

$(4k - 1)^2 \leq 1^2 + 2^2$

$\Leftrightarrow$ $16k^2 - 8k - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $4k^2 - 2k - 1 \leq 0$

Suy ra: $\frac{1-\sqrt{5}}{4} \le k \le \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

k là số nguyên, nên k = 0

Khi k = 0 thì phương trình (1) thành:

$$\cos^2 x = \pm\sin 2x$$
$$= \pm 2\sin x\cos x$$
$$\cos x(\cos x \pm 2\sin x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\sin x = \pm\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \text{tg}x = \pm\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Các nghiệm số là: $\boxed{\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \pm\text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi\end{array}}$ $(k \in Z)$

Bài 373

Giải phương trình: $1 + \text{cotg}2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

Đ.H. Sư phạm Vinh (1998, A,B, E)

GIẢI

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$ hay $x \neq \frac{k\pi}{2}$

Ta có: $1 + \text{cotg}2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x(1 + \text{cotg}2x) = 1 - \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x + \sin 2x\cos 2x = 1 - \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad \sin 2x\cos 2x = 1 - \sin^2 2x - \cos 2x$

$\qquad = \cos^2 2x - \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x(\cos 2x - \sin 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos 2x - \sin 2x = 1\end{array}\right.$

- Với $\cos 2x = 0$ $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{l k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$
- Với $\cos 2x - \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 2x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Suy ra $2x = 2k\pi$ (loại)

$\Rightarrow \quad \sin 2x = 0$ (loại)

Và $\quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$

Bài 374

Chứng minh rằng nếu: $\begin{cases} \sin x = 2\sin(x + y) \\ x + y \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \ k \in Z \end{cases}$

thì $\quad tg(x + y) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$

Đ.H. Thương mại (1998)

GIẢI

Ta có: $\sin x = 2\sin(x + y)$

Hay $\quad \sin((x + y) - y) = 2\sin(x + y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x + y)\cos y - \sin y\cos(x + y) = 2\sin(x + y)$

Chia 2 vế cho $\cos(x + y) \neq 0$ (giả thiết)

$tg(x + y)\cos y - \sin y = 2tg(x + y)$

$\Leftrightarrow \quad tg(x + y)(\cos y - 2) = \sin y$

Suy ra: $tg(x + y) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$ (đpcm)

Bài 375

Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của tam giác ABC theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì góc B thoả mãn: $B \leq \frac{\pi}{3}$

Đ.H. Thương mại (1998)

GIẢI

a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

Theo định lý hàm số cos ta có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

Suy ra: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$= \frac{1}{2ac}\left[a^2 + c^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2ac}\left[a^2 + c^2 - \frac{a^2 + c^2 + 2ac}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2ac}\left[\frac{3(a^2 + c^2) - 2ac}{4}\right] \geq \frac{6ac - 2ac}{8ac} = \frac{1}{2}$$

$\cos B \geq \dfrac{1}{2}$ thì $B \leq \dfrac{\pi}{3}$

Bài 376

Giải phương trình: $(1 + \sin x)^2 = \cos x$

Đ.H. Thuỷ lợi (1'98)

GIẢI

Điều kiện: $\cos x \geq 0$, bình phương 2 vế phương trình ta có:

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \sin x)^4 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \sin x)[(1 + \sin x)^3 - (1 - \sin x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \sin x)(\sin^3 x + 3\sin^2 x + 4\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \sin x)\sin x(\sin^2 x + 3\sin x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \cos x = 1 & \text{suy ra} & \boxed{x = 2k\pi}\ (k \in Z) \\ \sin x = -1 & \text{suy ra} & \boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\ (k \in Z) \end{array}\right.$$

$\sin^2 x + 3\sin x + 4 > 0$ (vì $\Delta < 0$)

Bài 377

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$

Trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác

Đ.H. T.L. (1998)

GIẢI

Ta có: $M = \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$

Cộng 1 vào 2 vế:

$$M + 1 = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad M + 1 = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \quad M + 1 = \frac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{3}{M+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + 1 + \cos^2 C = \frac{3}{M+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A + B)\cos(A - B) + 1 + \cos^2 C - \frac{3}{M+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos C\cos(A - B) + 1 + \cos^2 C - \frac{3}{M+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 C - \cos C\cos(A - B) + \left(1 - \frac{3}{M+1}\right) = 0$$

cosC là một nghiệm của phương trình bậc hai này, phương trình có nghiệm khi: $\Delta = \cos^2(A - B) - 4\left(1 - \dfrac{3}{M+1}\right) \ge 0$

$$\text{Hay } 4\left(1 - \frac{3}{M+1}\right) \le \cos^2(A - B) \le 1$$

$$1 - \frac{3}{M+1} \le \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad M \le 3$$

Giá trị lớn nhất của M = 3 khi: $\begin{cases} \cos^2(A - B) = 1 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

Từ đó ta suy ra: $\begin{cases} \sin(A-B)=0 & \Leftrightarrow \quad A = B \\ \cos C = \frac{1}{2}\cos(A-B) & \Leftrightarrow \quad C = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của M = 3 khi A, B, C là 3 góc của tam giác đều.

Bài 378

Giải phương trình:

$$\mathbf{\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x\cos x = \cos x + 8\cos x\cos^3 3x}$$

GIẢI

Ta có: $\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x\cos x = \cos x + 8\cos x\cos^3 3x$

$\Leftrightarrow \quad \cos 10x + 2\cos^2 4x = \cos x + 2\cos x(4\cos^3 3x - 3\cos 3x)$

$\Leftrightarrow \quad \cos 10x + 1 + \cos 8x = \cos x + 2\cos x.\cos 9x$

$\Leftrightarrow \quad \cos 10x + 1 + \cos 8x = \cos x + \cos 10x + \cos 8x$

$\Leftrightarrow \quad \cos x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 2k\pi} \quad (k \in Z)$

Bài 379

Giải phương trình: $\mathbf{\sin^3 x\cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x\sin x}$

Đ.H. Văn hoá Hà Nội (1998)

GIẢI

Ta có: $\sin^3 x\cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x\sin x$

$\Leftrightarrow \quad \sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad 4\sin x\cos x(-\cos 2x) = 1$

$\Leftrightarrow \quad -2\sin 2x.\cos 2x = 1$

$\Leftrightarrow \quad \sin 4x = -1$

$\Leftrightarrow \quad 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}} \quad (k \in Z)$

Bài 380

a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác **ABC**. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$$

Đ.H. Dân lập Văn Lang TP. HCM (1998)

GIẢI

Ta có: $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$

$\Leftrightarrow\quad a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2-(a^3+b^3+c^3)>0$

$\Leftrightarrow\quad a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]>0$

$\Leftrightarrow\quad a\left[(b-c+a)(b-c-a)\right]+b\left[(c-a+b)(c-a-b)\right]$

$\quad\quad+c\left[(a+b+c)(a+b-c)\right]>0$

$\Leftrightarrow\quad (b-c+a)\left[a(b-c-a)-b(c-a+b)+c(a+b+c)\right]>0$

$\Leftrightarrow\quad (b-c+a)\left[(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2)+c(a+b+c)\right]>0$

$\Leftrightarrow\quad (b-c+a)\left[c^2-(a-b)^2\right]>0$

$\Leftrightarrow\quad (a+b-c)\left[(c+a-b)(c-a+b)\right]>0$

$\Leftrightarrow\quad (a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)>0 \qquad (1)$

Trong tam giác, tổng 2 cạnh lớn hơn cạnh thứ ba, nên bất đẳng thức (1) luôn đúng.

Bài 381

Giải phương trình: $4(\cos^4x+\sin^4x)+\sqrt{3}\sin4x=2$

Đ.H Dân lập Văn Lang TP. HCM 1998

GIẢI

Ta có: $4(\cos^4x+\sin^4x)+\sqrt{3}\sin4x=2$

$\Leftrightarrow\ 4((\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x)+\sqrt{3}\sin4x=2$

$\Leftrightarrow\ 4(1-\frac{1}{2}\sin^22x)+\sqrt{3}\sin4x=2$

$\Leftrightarrow\ 4(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos4x)+\sqrt{3}\sin4x=2$

$\Leftrightarrow\ 4-(1-\cos4x)+\sqrt{3}\sin4x=2$

$\Leftrightarrow\ \cos4x+\sqrt{3}\sin4x=-1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 4x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 4x\cos\frac{\pi}{3} + \sin 4x\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right.$$

Nghiệm số: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

$\boxed{x = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

Bài 382

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh: $a + b + c \le 3\sqrt{3}R$.

Đ.H. Dân lập Văn Lang (1998, I, D)

GIẢI

Ta có: $a + b + c \le 3\sqrt{3}R$ (1)

Từ định lý hàm số sin suy ra $\frac{a}{2R} = \sin A$; $\frac{b}{2R} = \sin B$; $\frac{c}{2R} = \sin C$

Chia 2 vế của (1) cho 2R, ta được:

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

Đặt $T = \sin A + \sin B + \sin C$

$$\Rightarrow \quad T + \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{A+B+C}{3}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\left(\frac{C + \frac{A+B+C}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{C - \frac{A+B+C}{3}}{2}\right)$$

$$\le 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{A+B+4C}{6}\right)$$

$$= 4\sin\left(\frac{4A+4B+4C}{12}\right)\cos\left(\frac{2A+2B-4C}{12}\right)$$

$$\le 4\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$$

$$T \le 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Từ (3) và (2) ta suy ra (1) đúng tức là $a + b + c \le 3\sqrt{3}R$

Bài 383

Giải phương trình lượng giác: $\cos^2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

Học **viện Quan hệ Quốc tế (1998, A, D)**

GIẢI

Ta có: $\cos^2x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

Biết: $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ nên phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 2\cos^2 4x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 4x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 4x(1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 4x\left[1 + 2\cos 2x + 2(2\cos^2 2x - 1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos 4x\left[4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1\right] = 0 \qquad (1)$

Do đó: $\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0 \\ 4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0\end{array}\right.$

- Với $\cos 4x = 0$ suy ra $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}} \quad (k \in Z)$$

- Với $4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0$ suy ra:

$$\cos 2x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \quad \text{(loại)}$$

$$\cos 2x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + k\pi} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 384

> **Các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện:**
>
> $$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}$$
>
> **Chứng minh rằng tam giác ABC cân.**
>
> **Học viện quan hệ Quốc tế**

GIẢI

Hệ thức cần chứng minh: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot g\dfrac{A}{2}\cot g\dfrac{C}{2}$ (1)

Tử số: $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} + 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (2')$$

Tương tự, ta có:

$\sin A + \sin B - \sin C = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} - 2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}.\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\right)\left(-\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad (3)$$

Do đó: $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \dfrac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \cot g\dfrac{A}{2}\cot g\dfrac{B}{2}$

Kết quả này so với (1) ta có: $\cot g\dfrac{A}{2}\cot g\dfrac{B}{2} = \cot g\dfrac{A}{2}\cot g\dfrac{C}{2}$

Suy ra B = C $\Rightarrow$ ABC là tam giác cân.

Bài 385

Giải phương trình: $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1998)

GIẢI

Ta có: $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x - \left(\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{3x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \sin\dfrac{3x}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in Z)} \\ \sin\dfrac{3x}{2} = \sin\left(\dfrac{3}{2}.\dfrac{\pi}{3} + 4k\pi\right) = 1 \text{ đúng } \forall k \in Z \end{cases}$$

Cách khác. Từ (1) ta suy ra:

$$1-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1\\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in Z)\\ \cos\left(2.\frac{\pi}{3}+4k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \text{ đúng } \forall k\in Z\end{cases}$$

Bài 386

Cho a, b, c là độ dài các cạnh và r là bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1998)

GIẢI

Ta có: $a^2\ge a^2-(b-c)^2$ nên $\frac{1}{a^2}\le\frac{1}{a^2-(b-c)^2}$ (1)

Tương tự: $b^2\ge b^2-(c-a)^2$ nên $\frac{1}{b^2}\le\frac{1}{b^2-(c-a)^2}$ (2)

$c^2\ge c^2-(a-b)^2$ nên $\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{c^2-(c-b)^2}$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) vế với vế, ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{a^2-(b-c)^2}+\frac{1}{b^2-(c-a)^2}+\frac{1}{c^2-(a-b)^2}$$

$$=\frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)}+\frac{1}{(b+c-a)(b-c+a)}+\frac{1}{(c+a-b)(c-a+b)}$$

$$=\frac{1}{2(p-c).2(p-b)}+\frac{1}{2(p-a).2(p-c)}+\frac{1}{2(p-b).2(p-a)}$$

$$=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{p^2}{4S^2}=\frac{p^2}{4(pr)^2}=\frac{1}{4r^2}$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\le\frac{1}{4r^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $b-c=c-a=a-b=0$. Do đó $a=b=c$ và tam giác ΔABC là tam giác đều.

Bài 387

Giải phương trình: $2(\text{cotg}2x - \text{cotg}3x) = \text{tg}2x + \text{cotg}3x$

Đ.H. Y khoa Hà Nội (1998)

GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2}\ ;\ x \neq \dfrac{k\pi}{3} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$2\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x}{\sin 2x \sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin 3x \cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x(\cos 2x - \cos^2 x)}{\sin 2x \sin 3x \cos 2x} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \sin^3 x = 0$ (loại vì $\sin 2x \neq 0$). Do đó phương trình vô nghiệm.

Bài 388

Giải phương trình: $\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0$

Đ.H. Y khoa Hà Nội (1998)

GIẢI

Ta có:

$$\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\cos 6x}{2} - \sin^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x) - \sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[-2\sin 4x \sin(-2x)\right] - \sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x(\sin 4x - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x(2\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} k\pi \end{array}} \quad (k \in Z)$$

Bài 389

Xác định a để hai phương trình sau tương đương:

$$2\cos x\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x \qquad (1)$$

$$4\cos^2 x - \cos 3x = a\cos x + (4 - a)(1 + \cos 2x) \qquad (2)$$

Đại học Y Dược TP. HCM. (1998)

GIẢI

Ta có: $2\cos x\cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

$\Leftrightarrow \quad \cos 3x + \cos x = 1 + 2\cos^2 x - 1 + \cos 3x$

$\Leftrightarrow \quad \cos x(1 - 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Từ (2) ta có phương trình tương đương:

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 x - (4\cos^3 x - 3\cos x) = a\cos x + (4 - a)(2\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x + 2(2 - a)\cos^2 x + (a - 3)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x\left[4\cos^2 x + 2(2 - a)\cos x + (a - 3)\right] = 0$

Giải phương trình này, ta được:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \quad \text{và} \quad \cos x = \frac{a - 3}{2}$$

Để (1) và (2) tương đương thì ta phải có:

Hoặc $\dfrac{a - 3}{2} = 0$ hoặc $\dfrac{a - 3}{2} = \dfrac{1}{2}$

Từ đó, ta suy ra $a = 3$ hoặc $a = 4$

Phương trình $\cos x = \dfrac{a - 3}{2}$ vô nghiệm, muốn vậy thì ta phải có:

$$\frac{a - 3}{2} > 1 \text{ hoặc } \frac{a - 3}{2} < -1$$

Từ đó, ta suy ra $a > 5$ hoặc $a < 1$

Vậy để (1) và (2) tương đương thì: $\boxed{\begin{array}{lll} a = 3 & \text{hay} & a = 4\\ a > 5 & \text{hay} & a < 1\end{array}}$

Bài 390

Giải phương trình: $\sin^3x + \cos^3x = \sin x - \cos x$

Trung tâm **Đào dưỡng Cán bộ Y tế TP. HCM.**

GIẢI

a có $\sin^3x + \cos^3x = \sin x - \cos x$ (1)

Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $(k \in Z)$

Chia 2 vế của phương trình (1) cho $\cos^3x \neq 0$, ta được:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 1 = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\cos x}{\cos^3 x}$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^3x + 1 = tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$= tgx(1 + tg^2x) - (1 + tg^2x)$$

$$= tgx + tg^3x - 1 - tg^2x$$

$\Leftrightarrow \quad tg^2x - tgx + 2 = 0$. Phương trình vô nghiệm, vì $\Delta < 0$.

Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$; $k \in Z$

Khi đó từ (1) ta có:

$$\sin^3x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & \text{(loại)} \\ \sin x = \pm 1 & \text{hay} \quad \cos x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 391

Tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng:

$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$

TT. Bồi dưỡng **Cán bộ Y tế TP. HCM (1998)**

GIẢI

Bất đẳng thức cần chứng minh: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$

Ta có $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$

$$= 2 - \left(\frac{\cos 2A + \cos 2B}{2}\right) - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A + B)\cos(A - B) - \cos^2C$$
$$= 2 + \cos C\cos(A - B) - \cos^2C$$
$$= 2 + \cos C(\cos(A - B) -.\cos C)$$
$$= 2 + \cos C(\cos(A - B) + \cos(A+ B))$$
$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

Vì tam giác có ba góc nhọn nên cosA, cosB và cosC đều có giá trị dương, nên $\cos A\cos B\cos C > 0$. Do đó: $2 + 2\cos A\cos B\cos C > 2$

Nên $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$ (đpcm)

Bà 392

Giải phương trình: $4\sin^3x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

Cao đẳng Hải quan (1998)

GIẢI

Ta có: $4\sin^3x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

$\Leftrightarrow$ $4\sin^3x - 3\sin x - 1 = -\sqrt{3}\cos 3x$

$\Leftrightarrow$ $-\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 1$

$\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $-\sin\frac{\pi}{6}\sin 3x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 3x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

Do đó, ta suy ra: $3x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}}$ $(k \in Z)$

$3x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ $3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}}$ $(k \in Z)$

Bài 393

1. Giải phương trình: $\sin^6x + \cos^6x = \cos4x$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Học viện Ngân hàng (1998)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^6x + \cos^6x = \cos4x$ (1)

Vế trái:

$$\sin^6x + \cos^6x = (\sin^2x + \cos^2x)^3 - 3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x + \cos^2x)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos4x}{2}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos4x \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có: $\cos4x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

2. Với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\sin x > 0$ và $\cos x > 0$

Theo bất đẳng thức Cô si ta có:

$$y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq 2\frac{1}{\sqrt{\sin x\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}} \geq 2\sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x}\\ \sin2x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là: $\boxed{2\sqrt{2}}$

Bài 394

Giải phương trình: $2 + \cos x = 2\text{tg}\dfrac{x}{2}$

Học viện Ngân hàng, phân viện T.P. HCM. (1998)

GIẢI

Ta có: $2 + \cos x = 2\text{tg}\dfrac{x}{2}$

Điều kiện: $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$ nên $x \neq \pi + 2k\pi$

Biết $\cos x = \dfrac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$

Do đó, phương trình đã cho là: $2 + \dfrac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = 2\text{tg}\dfrac{x}{2}$

Suy ra: $2 + 2\text{tg}^2\frac{x}{2} + 1 - \text{tg}^2\frac{x}{2} = 2\text{tg}\frac{x}{2} + 2\text{tg}^3\frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\text{tg}^3\frac{x}{2} - \text{tg}^2\frac{x}{2} + 2\text{tg}\frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\text{tg}\frac{x}{2} - 1\right)\left(2\text{tg}^2\frac{x}{2} + \text{tg}\frac{x}{2} + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0 \\ 2\text{tg}^2\frac{x}{2} + \text{tg}\frac{x}{2} + 3 > 0 \quad \text{vì} \quad \Delta = 1 - 24 = -23 < 0 \end{array}\right.$$

Vậy $\text{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0$ ta có nghiệm $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 395

Giải phương trình lượng giác sau: $\mathbf{2 + \cos 2x + 5\sin x = 0}$

Cao đẳng kỹ nghệ TP. HCM (1998)

GIẢI

Ta có: $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 + 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$

Giải ra, ta được:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{-1}{2} \\ \sin x = 3 \end{array}\right. \begin{array}{l} \text{suy ra nghiệm:} \\ \text{(loại)} \end{array} \quad \left[\boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 396

Tính đạo hàm của hàm số: $y = \sqrt{1 + 2tgx}$ tại $x = \frac{\pi}{4}$

Cao đẳng Kỹ nghệ TP. HCM. (1998)

GIẢI

Đạo hàm căn số: $\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Ta có: $y = \sqrt{1 + 2tgx}$

Đạo hàm: $y' = \frac{(1 + 2tgx)'}{2\sqrt{1 + 2tgx}} = \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{2\sqrt{1 + 2tgx}} = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1 + 2tgx}}$

Do đó: $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{1 + 2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

Bài 397

Giải phương trình: $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$

Cao đẳng Sư phạm Nghệ An (1998)

GIẢI

Ta có: $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

- Với $\cos 2x = 0$ suy ra $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$
- Với $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ suy ra: $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 398

Giải phương trình lượng giác: $\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin x$

Phân viện Báo chí và tuyên truyền (1998)

GIẢI

Ta có: $\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin x$ (1)

Đặt $x=t-\frac{\pi}{4}$ thì $x+\frac{\pi}{4}=t$

Vế phải: $\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\sin t-\cos t$

Vế trái: $\sin^3\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sin^3 t$

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$\sin^3 t=\sin t-\cos t$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t=\sin t-\sin^3 t=\sin t(1-\sin^2 t)=\sin t.\cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t=\frac{1}{2}\sin 2t\cos t \Leftrightarrow \cos t\left(1-\frac{1}{2}\sin 2t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t(2-\sin 2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ 2-\sin t=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos t=0 \text{ (vì } 2-\sin t>0\,\forall t)$$

- Với $\cos t=0$ suy ra $t=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Do đó: $x=t-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi-\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\pi} \quad (k\in Z)$$

Bài 399

Chứng minh rằng trong tam giác ABC thoả mãn điều kiện sau:

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=0$$

thì tam giác đó là tam giác vuông.

Phân viện Báo chí và tuyên truyền (1998)

GIẢI

Ta có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C.\cos(A - B) + 2\cos^2 C = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C[\cos(A - B) - \cos C] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C.2\cos A\cos B = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos A\cos B\cos C = 0$

Do đó ta suy ra, nếu $\cos A = 0$ thì $A = 90^0$, hoặc $\cos B = 0$ thì $B = 90^0$, hoặc $\cos C = 0$ thì $C = 90^0$. Vậy ΔABC là tam giác vuông.

Bài 400

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

Phân viện Báo chí và tuyên truyền (1998, ban KH xã hội)

GIẢI

Bất đẳng thức đã cho: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$ (1)

Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$$= 1 + \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} + \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C \qquad (2)$$

Từ (2) và (1) ta suy ra: $\cos(A + B)\cos(A - B) + \cos^2 C + \frac{1}{4} \geq 0$

$$4\cos^2 C - 4\cos(A - B)\cos C + 1 \geq 0$$

$$[2\cos C - \cos(A - B)]^2 + \sin^2(A - B) \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} \sin(A - B) = 0 & \Leftrightarrow \quad A = B \\ 2\cos C = \cos(A - B) = 1 & \Leftrightarrow \quad C = 60^0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều.

NHỮNG ĐỀ LƯỢNG GIÁC THI ĐẠI HỌC- CAO ĐẲNG TRONG TOÀN QUỐC 1999- 2000-2001

Bài 401

Giải phương trình: $\text{cotg}2^x = \text{tg}2^x + 2\text{tg}2^{x+1}$

Đại học An ninh Hà Nội (1999)

GIẢI

Ta có: $\text{cotg}2^x = \text{tg}2^x + 2\text{tg}2^{x+1}$

Hay: $\text{cotg}2^x - \text{tg}2^x - 2\text{tg}2^{x+1} = 0 \qquad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin(2.2^x) \neq 0 \\ \cos(2^{x+1}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2^x \neq \dfrac{k\pi}{4}$ $(k \in N)$

Ta có:

$$\frac{\cos 2^x}{\sin 2^x} - \frac{\sin 2^x}{\cos 2^x} = \frac{\cos^2(2^x) - \sin^2(2^x)}{\sin 2^x . \cos 2^x}$$

$$= \frac{\cos(2.2^x)}{\frac{1}{2}\sin(2.2^x)}$$

$$= 2\text{cotg}(2.2^x)$$

Do đó từ (1) ta suy ra:

$$2\text{cotg}(2.2^x) - 2\text{tg}(2.2^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\text{cotg}(2^{x+1}) - \text{tg}(2^{x+1})) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}(2^{x+1}) = \text{tg}(2^{x+1}) = \text{cotg}\left[\frac{\pi}{2} - 2^{x+1}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{x+1} = \left(\frac{\pi}{2} - 2^{x+1}\right) + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{x+2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2 = \log_2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \log_2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - 2$$

$$= \log_2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \log_2 4$$

$$= \log_2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right) \quad (k \in N)$$

Phương trình có nghiệm số $\boxed{x = \log_2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right)}$ $(k \in N)$

Bài 402

Tam giác nhọn ABC có các góc thoả mãn hệ thức:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Đại học An ninh Hà Nội (1999, A)

GIẢI

Hệ thức đã cho: $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Có các góc A, B, C nhọn nên $\cos A > 0$; $\cos B > 0$ và $\cos C > 0$

Biết: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Suy ra
$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{4}{\cos A + \cos B}$$
$$\geq \frac{4}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$
$$\geq \frac{2}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{2}{\sin\frac{C}{2}} \qquad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} \cos A = \cos B \\ \cos\frac{A-B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A = B$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{2}{\sin\frac{A}{2}}$ (2)

Dấu "=" khi B = C

$$\frac{1}{\cos C}+\frac{1}{\cos A}\ge\frac{2}{\sin\frac{B}{2}} \qquad (3$$

Dấu "=" khi C = A

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một ta được:

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\ge\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C nên ΔABC là tam giác đều.

Bài 403

1. Giải phương trình: $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=10$

2. Tam giác ABC có đặc điểm gì, nếu các góc của nó thoả mãi hệ thức: $\frac{\sin C}{\sin B}=2\cos A$

Đ.H. An ninh Hà Nội (1999, D)

GIẢI

1. Ta có: $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=10 \qquad (1$

Đặt $9^{\sin^2 x}=t$ thì $9^{\cos^2 x}=9^{1-\sin^2 x}=\frac{9}{t}$

Do $0\le\sin^2 x\le 1$ nên $9^0\le 9^{\sin^2 x}\le 9^1$

$$1\le t\le 9$$

Từ (1) ta có:

$$t+\frac{9}{t}=10$$

$$\Leftrightarrow\quad t^2-10t+9=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}t=1\\t=9\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}9^{\sin^2 x}=1\\9^{\sin^2 x}=9\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\sin^2 x=0\\\sin^2 x=1\end{array}\right.$$

Giải ra, ta được: $\boxed{x=\frac{k\pi}{2}}$ $(k\in Z)$

2. Ta có: $\frac{\sin C}{\sin B} = 2\cos A$

$\Leftrightarrow \quad \sin C = 2\sin B\cos A$

$\Leftrightarrow \quad \sin C = \sin(B + A) + \sin(B - A)$

$\quad\quad = \sin C + \sin(B - A)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(B - A) = 0 \quad \Leftrightarrow A = B$

Trong tam giác ABC có hai góc A = B là tam giác cân.

Bài 404

Giải phương trình: $\sin^3x + \cos^3x = 1$

Đại học An ninh (Cơ sở TP. HCM. (1999)

GIẢI

Ta có: $\sin^3x + \cos^3x = 1 \quad (1)$

Biết $\sin^2x + \cos^2x = 1$, nên từ (1) suy ra:

$\sin^3x + \cos^3x = \sin^2x + \cos^2x$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2x - \sin^3x + \cos^2x - \cos^3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2x(1 - \sin x) + \cos^2x(1 - \cos x) = 0$

- Với $\begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$ (loại)
- Với $\begin{cases} 1 - \sin x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ (loại)
- Với $\begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ 1 - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi}$ $(k \in Z)$
- Với $\begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ 1 - \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k2\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 405

Gọi A, B, C là ba góc tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là có hệ thức:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\cot gA + \cot gB + \cot gC) = \sqrt{3}$$

Đại học Bách khoa Hà Nội (1999)

GIẢI

Ta có: $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot gA+\cot gB+\cot gC)=\sqrt{3}$ (1

Điều kiện cần:

Tam giác ABC đều thì $\sin A=\sin B=\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{cotg}A=\text{cotg}B=\text{cotg}C=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Do đó (1):

$$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}\quad (VT=VP)$$

Điều kiện đủ: Từ (1) ta suy ra:

$$\left(\frac{1}{\sin A}-\text{cotg}A\right)+\left(\frac{1}{\sin B}-\text{cotg}B\right)+\left(\frac{1}{\sin C}-\text{cotg}C\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1-\cos A}{\sin A}\right)+\left(\frac{1-\cos B}{\sin B}\right)+\left(\frac{1-\cos C}{\sin C}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\right)^2=3$$

Trong mọi tam giác ta có:

$$\begin{cases}\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}=1\\ \text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{C}{2}\ge\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}=1\end{cases}$$

nên $\left(\text{tg}\frac{A}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{C}{2}\right)^2=$

$$=\text{tg}^2\frac{A}{2}+\text{tg}^2\frac{B}{2}+\text{tg}^2\frac{C}{2}+2\left(\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}+\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}+\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2}\right)^2 \ge 1 + 2 \ge 3$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C và ABC là tam giác đều.

Bài 406

Giải phương trình: $tg^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = tgx - 1$

Học viện Công nghệ Bưu chính viễn thông (1999)

GIẢI

Ta có: $tg^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = tgx - 1$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in Z)$$

Đặt $t = x - \frac{\pi}{4}$ thì $x = t + \frac{\pi}{4}$

Do đó: $tgx = tg\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{tgt + tg\frac{\pi}{4}}{1 - tgt.tg\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1+tgt}{1-tgt}$

Và: $tgx - 1 = \dfrac{1+tgt}{1-tgt} - 1 = \dfrac{2tgt}{1-tgt}$ (2)

Thế (2) vào (1) ta được:

$$tg^3t = \frac{2tgt}{1-tgt} \Leftrightarrow tg^3t(1 - tgt) = 2tgt$$

$$\Leftrightarrow \quad tgt(tg^2t(1 - tgt) - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tgt(tg^2t - tg^3t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tgt(tgt + 1)(tg^2t - 2tgt + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \text{tgt} = 0 \\ \text{tgt} = -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = \frac{\pi}{4} + l\pi \end{array}\right.$$

Suy ra: $x = t + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4} + k\pi}$

$x = t + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + l\pi + \frac{\pi}{4} = \boxed{l\pi}$ $\qquad (k, l \in Z)$

Bài 407

Hãy xác định dạng tam giác ABC để:

cotgA + cotgB + cotgC nhận giá trị nhỏ nhất

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông (1999)

GIẢI

Ta có: $T = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C \qquad (1)$

Không mất tính chất tổng quát, ta giả thiết $0 < A \le B \le C$

nên $0 < A < B < \frac{\pi}{2}$. Hàm số cotgx lõm trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B \ge 2\text{cotg}\frac{A+B}{2} = 2\text{tg}\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Biết $\text{cotg}2a = \frac{1 - \text{tg}^2 a}{2\text{tg}a} = \frac{1}{2\text{tg}a} - \frac{1}{2}\text{tg}a$

nên $\text{cotg}C = \frac{1}{2\text{tg}\frac{C}{2}} - \frac{1}{2}\text{tg}\frac{C}{2}$

Do đó: $T \ge 2\text{tg}\frac{C}{2} + \frac{1}{2\text{tg}\frac{C}{2}} - \frac{1}{2}\text{tg}\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad T \ge \frac{3}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \frac{1}{2\text{tg}\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta suy ra: $\quad T \ge 2\sqrt{\frac{3}{2}\text{tg}\frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2\text{tg}\frac{C}{2}}} = \sqrt{3}$

$T = \sqrt{3}$ khi và chỉ khi dấu "=" xảy ra ở (2) và (3) nên:

$$\begin{cases} A = B \\ \frac{3}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2\text{tg}\frac{C}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^0 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của cotgA + cotgB + cotgC là $\sqrt{3}$ và ΔABC là tam giác đều.

Bài 408

Giải phương trình lượng giác: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

H.V Công nghệ Bưu chính Viễn thông (1999)

GIẢI

Ta có: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (1)

Đặt $x = t - \frac{\pi}{4}$ thì $3x - \frac{\pi}{4} = 3t - \pi$

Suy ra: $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-(\pi - 3t)) = -\sin 3t$

Phân tích: $3t = t + 2t$, ta có:

$$\sin 3t = \sin(t + 2t)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sin 3t = -(\sin t\cos 2t + \sin 2t\cos t) \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$-(\sin t\cos 2t + \sin 2t\cos t) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\sin t$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)\sin t$$

$$= -\sin t\cos 2t$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2t\cos t = 0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin 2t = 0 \\ \cos t = 0 \end{array}\right.$$

- Với $\sin 2t = 0$

  $\Rightarrow 2t = k\pi$

  $\Rightarrow t = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$

- Với $\cos t = 0$

$$t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$$

Nghiệm số của phương trình (3) là $t = \frac{k\pi}{2}$

Do đó: $x = t - \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{1}{4}(2k-1)\pi} \quad (k \in Z)$

Bài 409

1. Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số sau trên tập R

$$f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \sqrt{5}$$

2. Tính $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Học viện Công nghệ BCVT

GIẢI

1. Ta có: $f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \sqrt{5}$

$$= 2\frac{(1 - \cos 2x)}{2} + 2\sin 2x + \sqrt{5}$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right) + \left(1 + \sqrt{5}\right)$$

Đặt $\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos\varphi$ thì $\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin\varphi$

$F(x) = (1 + \sqrt{5}) + \sqrt{5}\sin(2x - \varphi)$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của f(x) là: $1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = \boxed{1}$

2. Tính $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$$

Ta có: $\frac{-1}{|x|} < \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|}$; $\forall x \ne 0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Do đó $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \frac{\sin x}{x}}{x + \frac{\sin x}{x}} = \boxed{1}$

Bài 410

> **1/ Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông là: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$**
>
> **2/ Giải phương trình lượng giác: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$**
>
> **Đại học Công đoàn (1999)**

GIẢI

1. Ta có: $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A + B)\cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C\cos(A - B) + 2\cos^2 C = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C[\cos(A - B) - \cos C] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\cos C.2\cos A\cos B = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos A\cos B\cos C = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ ΔABC là tam giác vuông

2. Ta có: $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x + \cos^2 x + (\sin x + \cos x) + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x + 1 + \cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\ \boxed{\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 411

1. **Tìm các nghiệm của phương trình:**

$$1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0 \text{ thoả mãn } \cos x \geq 0$$

2. **Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:**

$$y(x) = 5\cos x - \cos 5x \text{ trên } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Đại học Cảnh sát nhân dân (1999)

GIẢI

1. Ta có: $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0 \qquad ( )$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 5\sin x + 2(1 - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} = \dfrac{1}{2}$ và 3 (loại)

- Với $\sin x = \dfrac{1}{2}$ suy ra: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.$

Nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ cho:

$\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$ (nhận được)

Nghiệm $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ cho:

$\cos x = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0$ (loại)

Vậy nghiệm số của phương trình (1) là: $\boxed{x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z$

2. Ta có: $y(x) = 5\cos x - \cos 5x$

$y'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x$

$f''(x) = 0$ khi $\sin 5x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 3x \sin 2x = 0$

- Với $\cos 3x = 0$

$\Rightarrow \quad 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

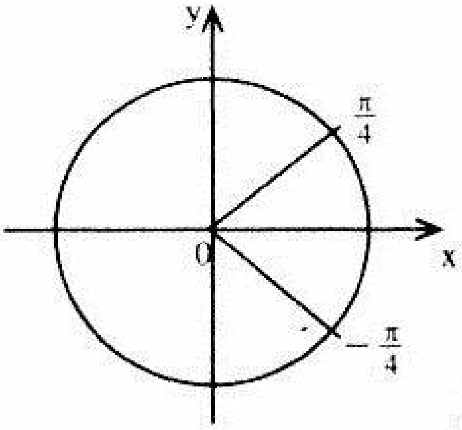
$\Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \quad (k \in Z)$

- Với $\sin 2x = 0$

$$2x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

Các nghiệm số trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ gồm $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ và $x_3 = \frac{\pi}{6}$



Bảng xét các giá trị của x và y:

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
y	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$	4	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$

Ta có: $4 = \sqrt{16} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ và $3\sqrt{3} > 3\sqrt{2}$

Do đó, giá trị lớn nhất của y(x) trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ là $3\sqrt{3}$

$$\boxed{\max\ y(x) = 3\sqrt{3}}$$

Bài 412

Cho phương trình: $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10,5\pi + 10x)$

Tìm các nghiệm x thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Đại học Dược Hà Nội (1999)

GIẢI

Ta có: $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin(10,5\pi + 10x)$ (1)

Biết: $\sin(10,5\pi + 10x) = \sin\left(\frac{21\pi}{2} + 10x\right)$

$$= \sin\left[20\pi + \frac{\pi}{2} + 10x\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 10x\right)$$

$$= \cos 10x$$

$$\sin^2 4x = \frac{1}{2}(1 - \cos 8x)$$

$$\cos^2 6x = \frac{1}{2}(1 + \cos 12x)$$

Do đó (1) tương đương:

$$\frac{1-\cos 8x}{2} - \frac{1+\cos 12x}{2} = \cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \quad -(\cos 12x + \cos 8x) = 2\cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\cos 10x \cos 2x = 2\cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 10x(1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 10x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình có 5 nghiệm số:

$x = \frac{\pi}{20}$; $x = \frac{3\pi}{20}$ $(k = 1)$; $x = \frac{5\pi}{20}$ $(k = 2)$;

$x = \frac{7\pi}{20}$ $(k = 3)$; $x = \frac{9\pi}{20}$ $(k = 4)$

Bài 413

Tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a + b + c} = \dfrac{1}{2}$, **chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.**

Đại học Dược Hà Nội (1999)

GIẢI

Ta có: $$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a+b+c} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Biết $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$

Từ (1) ta có: $$\frac{2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C}{2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 1$$

Ta có: $2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 2(\sin A + \sin B + \sin C)$

$$(\sin 2A + \sin 2B - 2\sin C) + (\sin 2B + \sin 2C - 2\sin A) + (\sin 2C + \sin 2A - 2\sin B) \qquad (2)$$

Do đó (2) có thể viết:

$$2\sin C[\cos(A-B) - 1] + 2\sin A[\cos(B-C) - 1] + 2\sin B[\cos(C-A) - 1] = 0 \qquad (3)$$

Vì sinA, sinB, sinC > 0 nên từ (3) suy ra:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos(A-B)=1 & \Leftrightarrow & A=B \\ \cos(B-C)=1 & \Leftrightarrow & B=C \\ \cos(C-A)=1 & \Leftrightarrow & A=C \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad A=B=C$$

Suy ra: $\boxed{\text{ABC là tam giác đều}}$

Bài 414

Cho $f(x) = 3\cos^6 2x + \sin^4 2x + \cos 4x - m$

1/ Giải phương trình f(x) = 0 khi m = 0

2/ Cho $g(x) = 2\cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x + 1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình f(x) = g(x) có nghiệm.

Đại học Cần Thơ (1999, A, B)

GIẢI

1. Ta có: $f(x) = 3\cos^6 2x + \sin^4 2x + \cos 4x - m$

Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$$\begin{array}{ll} & 3\cos^6 2x + \sin^4 2x + \cos 4x = 0 \\ \Leftrightarrow & 3\cos^6 2x + (1-\cos^2 2x)^2 + 2\cos^2 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3\cos^6 2x + 1 - 2\cos^2 2x + \cos^4 2x + 2\cos^2 2x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3\cos^6 2x + \cos^4 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos^4 2x(3\cos^2 2x + 1) = 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \cos^4 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

2. Khi f(x) = g(x) ta có: $2\cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x + 1} = \cos^4 2x(3\cos^2 2x + 1) - m$ (1)

Đặt $\cos^2 2x\sqrt{3\cos^2 2x - 1} = t$ $(0 \le t \le 2)$

Từ (1), ta có: $t^2 - 2t = m$

Hàm số $y = t^2 - 2t = 0$ có $0 \le t \le 2$ có miền giá trị $-1 \le y \le 0$.

Từ đó suy ra để phương trình có nghiệm thì m phải thoả mãn:

$$\boxed{-1 \le m \le 0}$$

Bài 415

1. **Giải phương trình: $3(tgx + cotgx) = 2(2 + \sin 2x)$**
2. **Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn $\frac{\sin A}{\cos B} = 2\sin C$**

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Đại học Cần Thơ (1999, D)

GIẢI

1. Ta có: $3(tgx + cotgx) = 2(2 + \sin 2x)$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

Biết $tgx + cotgx = \frac{2}{\sin 2x}$, nên (1) tương đương:

$$3.\frac{2}{\sin 2x} = 2(2 + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -3 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có: $\frac{\sin A}{\cos B} = 2\sin C$

$$\sin A = 2\sin C\cos B$$
$$= \sin(C + B) + \sin(C - B)$$
$$= \sin A + \sin(C - B)$$

$\Leftrightarrow \quad \sin(C - B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = C$

Vậy ΔABC là tam giác cân.

Bài 416

Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}\cot g\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot g\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Đại học Giao thông vận tải (1999)

GIẢI

Ta có: $\sin^4x + \cos^4x = \frac{7}{8}\cot g\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot g\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$

Phương trình (1) tương đương:

$(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x = \frac{7}{8}\cot g\left(x+\frac{\pi}{3}\right)tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{8}$

$\Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{7}{8}$

$\Leftrightarrow \quad 1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{7}{8}$

$\Leftrightarrow \quad \cos 4x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 4x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}}$ $(k\in Z)$

Chú ý: $\cot g\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=tg\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=tg\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

nên $\cot g\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot g\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=tg\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cot g\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$

Bài 417

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\cot g^4a+\cot g^4b+2tg^2a\,tg^2b+2$$

Đại học Giao thông (1999)

GIẢI

Ta có: $P=\cot g^4a+\cot g^4b+2tg^2a\,tg^2b+2$

Phân tích: $\cot g^4a+\cot g^4b=(\cot g^2a-\cot g^2b)^2+2\cot g^2a\cot g^2b$

Khi đó: $P = (\text{cotg}^2a - \text{cotg}^2b)^2 + 2(\text{cotg}^2a\text{cotg}^2b + \text{tg}^2a\text{tg}^2b) + 2$

$= (\text{cotg}^2a - \text{cotg}^2b)^2 + 2(\text{cotg}a\text{cotg}b - \text{tg}a\text{tg}b)^2 + 4 + 2 \geq 6$

Với $a = b = \frac{\pi}{4}$ thì $P = 6$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\boxed{6}$

Bài 418

Xác định m để phương trình sau có nghiệm trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$$m\cos^2 2x - 4\sin x\cos x + m - 2 = 0$$

Đại học Giao thông (1999)

GIẢI

1. Ta có: $m\cos^2 2x - 4\sin x\cos x + m - 2 = 0$ (1)

Với $0 < x < \frac{\pi}{4}$ thì $0 < \sin 2x < 1$

Đặt $t = \sin 2x$ $(0 < t < 1)$, từ (1) ta có phương trình tương đương:

$m(1 - t^2) - 2t + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad m = \dfrac{2t + 2}{2 - t^2}$

Hàm số $f(t) = \dfrac{2t + 2}{2 - t^2}$ có đạo hàm $f'(t) = \dfrac{2(t^2 + 2t + 2)}{(t^2 - 2)^2} > 0 \; \forall t \in (0, 1)$

Hàm số f(t) đồng biến trong đoạn (0, 1) nên suy ra các giá trị của m là $f(0) < m < f(1) \Leftrightarrow \boxed{1 < m < 4}$

Bài 419

Giải phương trình lượng giác: $\dfrac{\sin x \cot g(5x)}{\cos(9x)} = 1$

Đại học Huế (1999)

GIẢI

Ta có: $\dfrac{\sin x \cot g(5x)}{\cos(9x)} = 1$ (1)

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin 5x \neq 0 \\ \cos 9x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \neq k\pi \\ 9x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{5} \\ x \neq \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{9} \end{cases} \quad (k \in Z)$$

Phương trình (1) tương đương:

$$\sin x \cot g 5x = \cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \frac{\cos 5x}{\sin 5x} = \cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x \cos 5x = \sin 5x \cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 6x - \sin 4x = \sin 14x - \sin 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 14x = \sin 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 14x = 6x + 2k\pi \\ 14x = (\pi - 6x) + 2k\pi \end{array}\right.$$

- Với $14x = 6x + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow \quad 8x = 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{l\pi}{4}} \qquad (k \in Z)\ ;\ (l \neq 4k)$$

- Với $14x = \pi - 6x + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow \quad 20x = \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{l\pi}{10}} \qquad (l, k \in Z)$$

Các nghiệm: $x = \frac{l\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{20} + \frac{l\pi}{10}$ thoả mãn điều kiện của bài toán.

Bài 420

Giải phương trình: $\mathbf{\ln(\sin^2 x) - 1 + \sin^3 x = 0}$

Đại học Huế (1999, Kiến trúc)

GIẢI

Ta có: $\ln(\sin^2 x) - 1 + \sin^3 x = 0$ (1)

Từ (1) ta suy ra: $\ln(\sin^2 x) = 1 - \sin^3 x$

Do $0 < \sin x \leq 1\ ;\ 0 < \sin^2 x \leq 1$

nên $\ln(\sin^2 x) \leq 0$

Vế phải $1 - \sin^3 x \geq 0 \quad \forall x \neq k\pi$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \ln(\sin^2 x) = 0 \\ 1 - \sin^3 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \sin^3 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 421

1. Giải phương trình: $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$

2. Trong tam giác ABC, các số tgA, tgB, tgC theo thứ tự này lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị nhỏ nhất của góc B.

Đại học Giao thông (cơ sở TP. HCM, 1999)

GIẢI

Ta có: $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$

$$1 + (\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x) = \frac{3}{2}.2\sin x\cos x$$

$$1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 3\sin x\cos x \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; $(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2})$

Suy ra: $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Do đó (1) có thể viết:

$$1 + t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 3\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(t^2 + 2t - 5) = 0$$

Giải ra, ta được: $\left[\begin{array}{ll} t = -1 & \\ t = -1 - \sqrt{6} & \text{(loại)} \\ t = -1 + \sqrt{6} & \text{(loại)} \end{array}\right.$

- Với $t = -1$, ta có:

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\pi+2k\pi \end{array}\right. \quad (k\in Z)$$

2. Với mọi tam giác không vuông, ta có:

$$tg(A+B)=-tgC$$

$$\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}=-tgC$$

$$tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC \qquad (1)$$

Theo bài ra $tgA+tgC=2tgB$ nên từ (1) ta có:

$$3tgB=tgA.tgB.tgC$$

$$\Leftrightarrow \quad tgAtgC=3$$

Bất đẳng thức Cô si cho ta:

$$3=tgA.tgC\le\left(\frac{tgA+tgC}{2}\right)^2=(tgB)^2$$

$$tgB\ge\sqrt{3}\ ;\ tgB\ge tg60^0$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của góc B là 60^0.

Bài 422

Giải phương trình lượng giác:

$$3tg^3x-tgx+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2x}-8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$$

Đại học Kiến trúc Hà Nội (1999)

GIẢI

Ta có $\quad 3tg^3x-tgx+\dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2x}-8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=0 \qquad (1)$

Điều kiện: $\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$

Từ (1) ta có phương trình tương đương:

$$3tg^3x - tgx + 3(1 + \sin x)(1 + tg^2x) - 8.\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3tg^3x - tgx + 3(1 + \sin x)(1 + tg^2x) - 4(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3tg^3x - tgx + (1 + \sin x)(3(1 + tg^2x) - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow tgx(3tg^2x - 1) + (1 + \sin x)(3tg^2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3tg^2x - 1)(tgx + 1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3tg^2x = 1 \\ tgx + 1 + \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \end{array}\right.$$

- Với $tgx = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$
- Với $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$ (2)

Đặt $\sin x + \cos x = t$ $(|t| \le \sqrt{2})$

Suy ra: $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Từ (2) ta có phương trình:

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - 1 = 0$$

Giải ra, ta được:

$$\left[\begin{array}{ll} t = -1 + \sqrt{2} & \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2} - 1\right) \\ t = -1 - \sqrt{2} & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi}$$

Bài 423

Cho tam giác ABC có các góc $C \le B \le A \le 90^0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \cos\frac{A - B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

Đại học Kiến trúc (1999)

GIẢI

Ta có $$M = \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \qquad (1)$$

Biết $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

Từ (1) suy ra $$M = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+\cos(A-B)}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos A + \cos B}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(1 + \cos(A-B) - (\cos A + \cos B)) \qquad (2)$$

Xét hiệu $T = \cos(A - B) - (\cos A + \cos B)$

Ta có: $$\sin C\cos(A-B) = \sin(A+B)\cos(A-B)$$

$$= \frac{1}{2}[\sin 2A + \sin 2B]$$

$$= \sin A\cos A + \sin B\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A-B) = \frac{\sin A}{\sin C}\cos A + \frac{\sin B}{\sin C}\cos B$$

Vì $C \le B \le A \le 90^0$ nên $\begin{cases}\sin A \ge \sin B \ge \sin C > 0\\ \cos A \ge 0 \quad \cos B \ge 0\end{cases}$

Suy ra: $$\frac{\sin A}{\sin C} \ge \frac{\sin B}{\sin C} \ge 1$$

và $$\cos(A-B) = \frac{\sin A}{\sin C}\cos A + \frac{\sin B}{\sin C}\cos B \ge \cos A + \cos B$$

Do đó: $\cos(A - B) - (\cos A + \cos B) \ge 0$

Từ (2) cho ta giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin A}{\sin C}\cos A = \cos A \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}A = 90^0\\ A = C\end{array}\right.\\[2ex] \dfrac{\sin B}{\sin C}\cos B = \cos B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}B = 90^0\\ B = C\end{array}\right.\end{cases}$$

nếu $A = 90^0$ và $B = 90^0$ thì ΔABC có 2 góc vuông, vô lý.

nếu $A = 90^0$ và $B = C$ thì ΔABC vuông cân

$A = B = C$ thì ΔABC là tam giác đều.

Bài 424

Giải phương trình lượng giác: $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}$

Học viện Kỹ thuật Mật mã (1999)

GIẢI

Ta có: $\sin^8 x + \cos^8 x = \dfrac{17}{32}$ (1)

Biết $\sin^8 x = (\sin^2 x)^4 = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^4$

$\cos^8 x = (\cos^2 x)^4 = \left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^4$

Đặt $t = \cos 2x$, từ (1) ta có:

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^4 = \frac{17}{32}$$

$\Leftrightarrow \quad (1-t)^4 + (1+t)^4 = 17$

$\Leftrightarrow \quad t^4 + 6t^2 - \dfrac{13}{4} = 0$ (2)

Giải (2), ta được:

$\Rightarrow \quad t^2 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos^2 2x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1+\cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}}$ $(k \in Z)$

Bài 425

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thoả mãn điều kiện: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

thì tam giác là đều.

Học viện Kỹ thuật Mật mã (1999)

GIẢI

Hệ thức đã cho: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

Ta có: $\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A + B)\cos(A - B)$

$= 2\sin C\cos(A - B) \le 2\sin C$ (1)

Tương tự, ta có:

$\sin 2B + \sin 2C = 2\sin A\cos(B - C) \le 2\sin A$ (2)

$\sin 2C + \sin 2A = 2\sin B\cos(C - A) \le 2\sin B$ (3)

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một, ta có:

$2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \le 2(\sin A + \sin B + \sin C)$

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sin A + \sin B + \sin C$

Dấu "=" xảy ra khi $A = B = C$ ⇔ tam giác ABC là đều.

Bài 426

Giải phương trình: $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1999)

GIẢI

Ta có: $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow\ -\sin x(1 - 2\sin^2 x) = \cos x(2\cos^2 x - 1) + \cos 2x$

$\Leftrightarrow\ -\sin x.\cos 2x = \cos x\cos 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow\ \cos 2x(\cos x + 1 + \sin x) = 0$

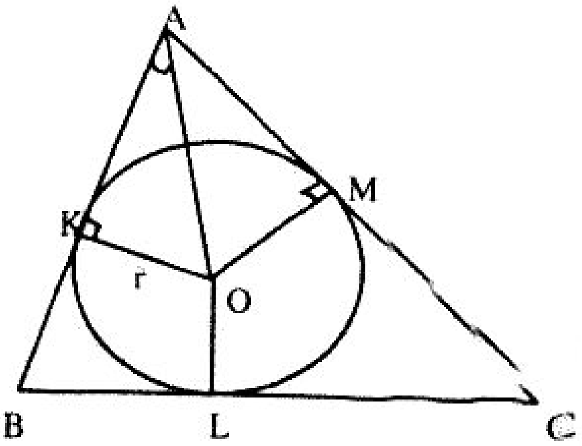
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin x + \cos x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\ \boxed{\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\\ x = \pi + 2k\pi\\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{array}}\right. (k \in Z)$$

Bài 427

Chứng minh rằng để tam giác là đều , điều kiện cần và đủ là $p + R = (2 + 3\sqrt{3})r$, trong đó p là nửa chu vi, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

Học viện Kỹ thuật Quân sự (1999)

GIẢI



Ta có:

$$2(AK + BL + LC) = 2p$$

$$AK + a = p$$

$$AK = p - a$$

Trong tam giác AKO, ta có:

$$\operatorname{tg}\widehat{KAO} = \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

Suy ra:

$$p - a = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

Tương tự: $p - b = r\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$; $p - c = r\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$

$$p = (p - c) + (p - b) + (p - c)$$

$$\Rightarrow \quad p = r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) \qquad ()$$

Biết $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$

và $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$

Suy ra: $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$

Hay: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1$

Theo bất đẳng thức Cô si với ba số dương

$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ ta có:

$$1 = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

Theo bất đẳng thức Cô si ta cũng có:

$$\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \quad)$$

Thế $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}$ ở (2) vào (1), ta được:

$$p = r\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)$$

$$= r\left(\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}\right) \geq 3\sqrt{3}r$$

Dấu "=" xảy ra khi $\cot g\frac{A}{2} = \cot g\frac{B}{2} = \cot g\frac{C}{2} \Rightarrow A=B=C$

ΔABC là tam giác đều.

Ta cũng có:

$$(p-a)+(p-b) = c$$

$$\Leftrightarrow \qquad r\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}\right) = 2R\sin C$$

$$\Leftrightarrow \qquad r\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad R = \frac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Biết

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos A)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right) \leq \frac{a^2}{4bc}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

Tương tự:

$$\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2} \le \frac{c}{2\sqrt{ab}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$$

Từ (3): $R = \dfrac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \ge \dfrac{r}{4.\frac{1}{8}} = 2r$

Dấu "=" xảy ra khi $b - c = c - a = a - b$, nên ΔABC là đều.

Vậy trong mọi tam giác ta có:

$$p + R \ge 3\sqrt{3} + 2r = (3\sqrt{3} + 2)r$$

Dấu "=" xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Bài 428

Giải phương trình: $\quad tgx\sin^2x - 2\sin^2x = 3(\cos2x + \sin x\cos x)$

Đại học Mỏ – Địa chất (199)

GIẢI

Ta có: $\quad tgx\sin^2x - 2\sin^2x = 3(\cos2x + \sin x\cos x) \quad (1)$

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

Từ (1) ta có phương trình tương đương:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2\sin^2x = 3(\cos^2x - \sin^2x + \sin x\cos x) \quad (2)$$

Chia 2 vế của (2) cho $\cos^2x \ne 0$, được:

$$tg^3x - 2tg^2x = 3(1 - tg^2x + tgx)$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^3x + tg^2x - 3tgx - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (tgx + 1)(tg^2x - 3) = 0$$

- Với $\quad tgx = -1 \quad \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$
- Với $\quad tg^2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad tgx = \pm\sqrt{3}$

$$\boxed{x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi}\quad (k \in Z)$$

Bài 429

Giả sử A, B, C là ba góc trong của một tam giác

Tìm giá trị bé nhất của biểu thức:

$$M = \frac{1}{2+\cos 2A} + \frac{1}{2+\cos 2B} + \frac{1}{2-\cos 2C}$$

GIẢI

Biểu thức đã cho: $M = \frac{1}{2+\cos 2A} + \frac{1}{2+\cos 2B} + \frac{1}{2-\cos 2C}$

Biết $2 + \cos2A > 0$; $2 + \cos2B > 0$ và $2 - \cos2C > 0$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có: $M \geq \frac{1}{\sqrt[3]{(2+\cos 2A)(2+\cos 2B)(2-\cos 2C)}}$

$$\geq \frac{1}{6+\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C}$$

Biến đổi biểu thức ở mẫu, ta có:

$$6 + \cos2A + \cos2B - \cos2C =$$
$$= 6 + 2\cos(A + B)\cos(A-B) - (2\cos^2C - 1)$$
$$= 7 - 2\cos C\cos(A - B) - 2\cos^2C$$
$$= 7 - 2(\cos^2C + \cos C\cos(A - B))$$
$$= 7 - 2\left[\left(\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right)^2 - \frac{1}{4}\cos^2(A - B)\right]$$
$$= 7 + \frac{1}{2}\cos^2(A - B) - 2\left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A - B)\right]^2$$

Do đó: $M \geq \frac{9}{7+\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{M \geq \frac{6}{5}}$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = 30° và C = 120°, giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{6}{5}$

Bài 430

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số: $y = \sin^{20}x + \cos^{20}x$

Đại học Luật Hà Nội (1999)

GIẢI

Biết $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ và $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ nên hàm số

$y = \sin^{20}x + \cos^{20}x$ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ $\frac{\pi}{2}$ nên chỉ cần xét y với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có:

Đạo hàm:

$$y' = 20\sin^{19}x\cos x - 20\cos^{19}\sin x$$

$$= \left(\frac{20\sin^{19}x\cos x - 20\cos^{19}x\sin x}{\cos^{19}x\sin x}\right)\cos^{19}x\sin x$$

$$= (20\text{tg}^{18}x - 20)\cos^{19}x\sin x$$

$$= 20\sin x\cos^{19}x(\text{tg}^{18}x - 1)$$

$y' > 0$ khi $\text{tg}^{18}x > 1 \Leftrightarrow \text{tg}x > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
y'		−	0	+	
y	1	↘	$\frac{1}{2^9}$	↗	1

Bảng trên cho ta biết giá trị lớn nhất của y là 1 khi $x = \frac{k\pi}{2}$ và giátrị nhỏ nhất của y là $\frac{1}{2^9}$ khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Bài 431

Giải phương trình lượng giác: $\cos^3x + \cos^2x + 2\sin x - 2 = 0$

Học viện Ngân hàng (1999, D,K)

GIẢI

Ta có: $\cos^3x + \cos^2x + 2\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2x(\cos x + 1) - 2(1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin^2x)(\cos x + 1) - 2(1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \sin x)\left[(\cos x + 1)(1 + \sin x) - 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \sin x)(\cos x + \sin x\cos x + 1 + \sin x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \sin x)(\cos x + \sin x + \sin x\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 1 - \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x + \sin x\cos x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

- Với $1 - \sin x = 0$

  $\Leftrightarrow \sin x = 1$

  $\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k \in Z)$

- Với $\cos x + \sin x + \sin x\cos x - 1 = 0$ (1)

  Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \le \sqrt{2}$

  Suy ra $\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

Từ (1) ta có: $t^2 + 2t - 3 = 0$

Giải ra, ta được: $t_1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}} \quad (k \in Z)$$

và $t_2 = -3$ (loại)

Bài 432

1. Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} < 4\text{tg}x$

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x + \cos^2 x \text{ trên đoạn } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội (1999)

GIẢI

1. Ta có: $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} < 4\text{tg}x$ (1)

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Từ (1) suy ra:

$$\sqrt{3}\,(1 + \mathrm{tg}^2x) < 4\mathrm{tg}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2x - 4\mathrm{tg}x + \sqrt{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}^2x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{tg}x + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3} < \mathrm{tg}x < \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có: $y = x + \cos^2x$

Đạo hàm: $y' = 1 - 2\cos x\sin x$

$= 1 - \sin 2x$

Với $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến $y' = 0$ khi

$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Do đó, giá trị lớn nhất của y là:

$$y_{max} = \frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} \text{ khi } x = \frac{\pi}{4}$$

và giá trị nhỏ nhất của y là:

$$y_{min} = 0 + \cos^2 0^0 = \boxed{1} \text{ khi } x = 0$$

Bài 433

1. **Giải phương trình lượng giác:** $\sin^3x\cos 3x + \cos^3x\sin 3x = \sin^3 4x$
2. **Các góc tam giác thoả mãn:**

$$\mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C = \mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

Đại học Ngoại thương (1999, A và)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^3x\cos 3x + \cos^3x\sin 3x = \sin^3 4x$ (1)

Biết $\cos3x = 4\cos^3x - 3\cos x$

$\sin3x = 3\sin x - 4\sin^3x$

Từ (1) suy ra:

$$\sin^3x(4\cos^3x - 3\cos x) + \cos^3x(3\sin x - 4\sin^3x) = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin x\cos x(\cos^2x - \sin^2x) = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\sin2x.\cos2x = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin4x = 4\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin12x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{12}} \quad (k \in Z)$$

2. Ta có:

$$\text{cotgA} + \text{cotgB} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B} = \frac{\sin C}{\frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]}$$

$$= \frac{2\sin C}{\cos(A-B) + \cos C} \geq \frac{2\sin C}{1+\cos C} = 2\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$\text{cotgA} + \text{cotgB} \geq 2\text{tg}\frac{C}{2} \quad (1) \quad (\text{dấu "=" khi } A = B)$$

Tương tự:

$$\text{cotgB} + \text{cotgC} \geq 2\text{tg}\frac{A}{2} \quad (2)$$

$$\text{cotgC} + \text{cotgA} \geq 2\text{tg}\frac{B}{2} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$\text{cotgA} + \text{cotgB} + \text{cotgC} \geq \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C và ΔABC là tam giác đều.

Bài 434

Giải phương trình lượng giác: $2\sin^3x - \cos2x + \cos x = 0$

Đại học Nông nghiệp I (1999)

GIẢI

Ta có phương trình:

$$2\sin^3x - \cos2x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^3x - (1 - 2\sin^2x) + \cos x = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2x(\sin x + 1) - (1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2(1 - \cos^2x)(\sin x + 1) - (1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \cos x)(2(1 + \cos x)(\sin x + 1) - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0 \\ 2(1 + \cos x)(\sin x + 1) - 1 = 0 \end{array}\right.$$

- Với $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi} \quad (k \in Z)$$

- Với $2(1 + \cos x)(\sin x + 1) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin x + 2 + 2\sin x\cos x + 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 + 2\sin x\cos x + 2(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x + 2) = 0$

Vì $\cos x + \sin x + 2 > 0$ nên chỉ có $\cos x + \sin x = 0$

Biết $\quad \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 435

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1 \quad \text{và} \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Đại học Nông nghiệp I (1999, A)

GIẢI

Trong tam giác ta có: $\frac{A + B + C}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

Biết $\quad \operatorname{tg}\frac{A + B}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}}{1 - \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\text{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1 - \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = 1$$

Với ba số dương $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}$, $\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}$ và $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}$, theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$1 = \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\left(\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$1^3 \geq 27\left(\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} = \text{tg}\frac{B}{2}\text{tg}\frac{C}{2} = \text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{tg}\frac{A}{2} = \text{tg}\frac{B}{2} = \text{tg}\frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow A = B = C$$

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Bài 436

Giải phương trình lượng giác: $\sin^2 x(\text{tg}x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$

Đại học Nông nghiệp I (1999, B)

GIẢI

Ta có:

$$\sin^2 x(\text{tg}x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3 \qquad (1)$$

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Chia 2 vế của (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$tg^2x(tgx + 1) = 3tgx(1 - tgx) + 3(1 + tg^2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^3x + tg^2x = 3tgx - 3tg^2x + 3 + 3tg^2x$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^3x + tg^2x - 3tgx - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (tgx + 1)(tg^2x - 3) = 0$$

Với $tgx + 1 = 0$, ta có nghiệm : $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Với $tg^2 x - 3 = 0$, ta có nghiệm : $\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 437

1. **Giải phương trình lượng giác: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$**
2. **Hãy tính các góc của ΔABC nếu trong tam giác đó ta có:**

$\sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A\sin B = \frac{9}{4} + 3\cos C + \cos^2 C$

Học viện Quan hệ quốc tế (1999)

GIẢI

1. Ta có:

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$$

Viết lại:

$$\cos 4x + \cos x + \cos 3x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{5x}{2}\left[\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{5x}{2}\left(2\cos x\cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \end{array}}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Ta có: $\sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B = \frac{9}{4} + 3\cos C + \cos^2 C$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin A + \sin B)^2 = \left(\frac{3}{2} + \cos C\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A + \sin B = \frac{3}{2} + \cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \frac{3}{2} + 2\cos^2\frac{C}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(2\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\frac{A-B}{2} = 0 & \Leftrightarrow \ A = B \quad \text{và} \quad C = \frac{2\pi}{3} \\ 2\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2} = 0 & \Leftrightarrow \ A = B = \frac{\pi}{6} \quad \text{và} \quad C = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Bài 438

Giải phương trình: $\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

Đại học Sư phạm Quy Nhơn (1999)

GIẢI

Phương trình đã cho: $\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$ (1)

(1) có thể viết thành:

$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{2^{-1}}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) - \log_2\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x + \cos\frac{x}{2} > 0 \\ \cos 2x + \cos\frac{x}{2} = \sin x + \cos\frac{x}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = \sin x$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x = \sin x$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Với $\sin x = -1$ thì điều kiện (2) cho ta:

  $\sin x + \cos\frac{x}{2} = -1 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0$ (vô nghiệm)

- Với $\sin x = \frac{1}{2}$ thì điều kiện (2) cho ta:

  $\sin x + \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{12} > 0$

Do đó: $\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ và $\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 439

Cho phương trình bậc hai:

$$x^2 - (2\cos\alpha - 3)x + 7\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - \frac{9}{4} = 0$$

Với những giá trị nào của α thì phương trình có nghiệm kép.

Đại học Sư phạm Quy Nhơn (1999), D

GIẢI

Phương trình bậc hai: $x^2 - (2\cos\alpha - 3)x + 7\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - \frac{9}{4} = 0$

có nghiệm kép khi biệt số $\Delta = 0$

$$\Delta = (2\cos\alpha - 3)^2 - 4(7\cos^2\alpha - 3\cos\alpha - \frac{9}{4}) = 0$$

$$= 4\cos^2\alpha - 12\cos\alpha + 9 - 28\cos^2\alpha + 12\cos\alpha + 9 = 0$$

$$= -24\cos 2\alpha + 18 = 6(3 - 4\cos^2\alpha) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2\alpha = 3$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Với những giá trị của $\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ thì phương trình đã cho có nghiệm kép.

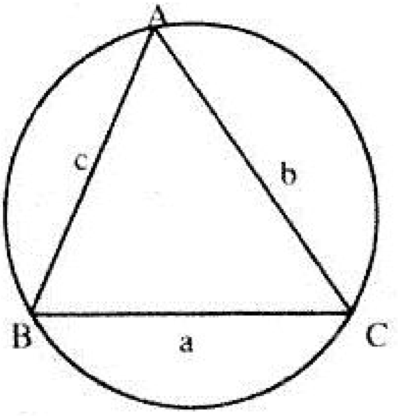
Bài 440

Cho tam giác ABC với BC = a ; CA = b ; AB = c. Chứng minh rằng tam giác ABC là vuông tại A hoặc cân tại A khi và chỉ khi:

$$\frac{b-c}{b+c} = \text{tg}\left(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)$$

Đại học Sư phạm Quy Nhơn (1999, D)

GIẢI



Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Theo định lý hàm số sin ta có: a=2RsinA; b=2RsinB và c=2RsinC

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{b-c}{b+c} = \text{tg}\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\frac{2R(\sin B - \sin C)}{2R(\sin B + \sin C)} = \text{tg}\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \text{tg}\frac{B-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}\frac{B+C}{2}\,\text{tg}\frac{B-C}{2} = \text{tg}\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow \text{tg}\frac{B-C}{2}\left(1-\text{cotg}\frac{B+C}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}\frac{B-C}{2} = 0 \\ 1-\text{cotg}\frac{B+C}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \text{tg}\frac{B-C}{2} = \text{tg}0^0 & \Leftrightarrow B = C \\ \text{cotg}\frac{B+C}{2} = 1 & \Leftrightarrow \frac{B+C}{2} = 45^0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} B = C & \Leftrightarrow \text{cân tại A} \\ B + C = 90^0 & \Leftrightarrow \text{vuông tại A} \end{array}$$

Vậy ΔABC là tam giác cân tại A hoặc là tam giác vuông tại A.

Bài 441

Cho tam giác ABC với ba góc đều nhọn.

1. Chứng minh rằng: $(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} > 2$
2. Bất đẳng thức trên còn đúng không nếu tam giác ABC vuông

Đại học Sư phạm Hà Nội 2 (199

GIẢI

1. Ta có:

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2C$$

$$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2C$$

$$= 2 + \cos C\left[\cos(A-B) - \cos C\right]$$

$$= 2 + \cos C\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

Nếu ΔABC nhọn thì $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$

Biết $0 < \sin^2A < 1$ và $\sin B < 1$ nên:

$$(\sin^2A)^{\sin B} > (\sin^2A)^1$$

$$(\sin A)^{2\sin B} > \sin^2A \qquad (1)$$

Tương tự:

$$\sin B)^{2\sin C} > \sin^2B \qquad (2)$$

$$(\sin C)^{2\sin A} > \sin^2C \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một, ta có:

$$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} > \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C$$

$$> 2 \quad \text{(đpcm)}$$

2. Tam giác ABC vuông tại A, khi đó:

$$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} = 1 + (\sin^2B)^{\sin C} + \sin^2C$$

$$\geq 1 + (\sin^2B)^1 + \sin^2C$$

$$= 1 + \cos^2C + \sin^2C = 2$$

Do đó, bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu ΔABC vuông.

Bài 442

Giải phương trình: $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Đại học Sư phạm Vinh (1999, A)

GIẢI

$\Leftrightarrow \cos 4x + (1 - \sin 4x) + 4(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + (\cos 2x - \sin 2x)^2 - 4(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)(\cos 2x - \sin 2x) - 4(\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 4\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Nghiệm số của phương trình là: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 443

Chứng minh rằng nếu ABC là tam giác nhọn thì:

$$tg^8A + tg^8B + tg^8C \geq 9tg^2A\, tg^2B tg^2C$$

Đại học Sư phạm Vinh (1999, A)

GIẢI

Ta có: $tg(A + B) = \dfrac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB}$

$\Leftrightarrow \quad tg(\pi - C) = -tgC = \dfrac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB}$

$\Leftrightarrow \quad tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$

Theo bất đẳng thức Cô si, ta có:

$$tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$$

$\Leftrightarrow \quad tgAtgB\,tgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$

$\Leftrightarrow \quad (tgAtgB\,tgC)^3 \geq 27(tgAtgB\,tgC)$

$\Leftrightarrow \quad (tgAtgB\,tgC)^2 \geq 27$

Nhân 2 vế với $(tgAtgB\,tgC)^6$, ta được:

$$(tgAtgB\,tgC)^8 \geq 27(tgAtgB\,tgC)^6$$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{(tgAtgBtgC)^8} \geq 3tg^2Atg^2Btg^2C$

Suy ra: $\sqrt[3]{tg^8Atg^8Btg^8C} \geq 3tg^2Atg^2Btg^2C$ (1

Nhưng $tg^8A + tg^8B + tg^8C \geq 3\sqrt[3]{tg^8Atg^8Btg^8C}$ (2

Từ (1) và (2) ta suy ra: $tg^8A + tg^8B + tg^8C \geq 9tg^2A\,tg^2Btg^2C$

Dấu "=" xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Bài 444

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

Đại học Sư phạm Vinh (1999, B, E)

GIẢI

Ta có: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} & (1) \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{5}{4} & (2) \end{cases}$

Bình phương (1) và trừ (2) từng vế một, ta được:

$$(\sin x + \sin y)^2 - (\sin^2 x + \sin^2 y) = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x\sin y - (\sin^2 x + \sin^2 y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\sin y = \frac{1}{2}$$

Hệ đã cho tương đương: $\begin{cases} S = \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ P = \sin x \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

sinx, siny là các nghiệm của phương trình:

$$X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = 0$$

Giải ra, ta được:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Hoặc} \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \\ \boxed{\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}} \end{array}\right. (k \in Z) \text{ Hoặc } \left[\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}} \\ \boxed{y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \end{array}\right. (k \in Z)$$

Bài 445

Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện: $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ \text{tg}B + \text{tg}C = 2\text{tg}A \end{cases}$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Đại học Sư phạm Vinh (1999, D, E)

GIẢI

Ta có: $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A & (1) \\ \text{tg}B + \text{tg}C = 2\text{tg}A & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}$$

Suy ra: $\cos^2\frac{B-C}{2} = 4\sin^2\frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+\cos(B-C)}{2} = 4\frac{1-\cos A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \cos(B-C) = 4 - 4\cos A \qquad (3)$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$\text{tg}B + \text{tg}C = \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = 2\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{\cos B\cos C} = \frac{2\sin A}{\cos A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = 2\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \cos(B+C) + \cos(B-C)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos A = \cos(B-C) \qquad (4)$$

Thế cos(B – C) ở (4) và (3) ta được:

$$1 + 2\cos A = 4 - 4\cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = 60^0$$

Do đó từ (4) $\Rightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B - C = 0 \Rightarrow B = C$.

Vậy ΔABC là đều.

Bài 446

Giải phương trình:

$$\sin^2 1{,}5x + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2{,}5x\right) = \sin^2 5{,}5x + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 6{,}5x\right)$$

Đại học Sư phạm Vinh (1999, G)

GIẢI

Ta có: $\sin^2 1{,}5x + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2{,}5x\right) = \sin^2 5{,}5x + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 6{,}5x\right)$

Biết $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ nên phương trình đã cho tương đương:

$$(1 - \cos 3x) + 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = (1 - \cos 11x) + 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 13x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = \cos 11x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 13x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 12x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 12x\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 12x\right) \end{array}\right.$$

- Với $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ ta có:

$$\Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

- Với $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 12x\right)$

Hay $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(12x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad 12x - \frac{\pi}{4} = 4x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{4}}$$

và $12x - \frac{\pi}{4} = -4x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$16x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{8}} \quad (k \in Z)$$

Bài 447

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không tù thì:

cosA + cosB + cosC < sinA + sinB + sinC

Đại học Sư phạm Vinh (1999, G)

GIẢI

Ta có: cosA + cosB + cosC < sinA + sinB + sinC (1)

Tam giác ABC có các góc A, B, C là các góc nhọn nên cosA, cosB, cosC ≥ 0; sinA, sinB, sinC > 0

Bình phương hai vế (1) ta có:

$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 < (\sin A + \sin B + \sin C)^2$

$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B + \cos C)^2 - (\sin A + \sin B + \sin C)^2 < 0$

$\Leftrightarrow (\cos^2 A - \sin^2 A) + (\cos^2 B - \sin^2 B) + (\cos^2 C - \sin^2 C) + 2(\cos A\cos B -$

$\sin A\sin B) + 2(\cos B\cos C - \sin B\sin C) + 2(\cos C\cos A - \sin C\sin A) < 0$

$\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 2\cos(A+B) + 2\cos(B+C) + 2\cos(C+A) < 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 + 2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 C - 1 - 2\cos C - 2\cos A - 2\cos B < 0$

$\Leftrightarrow 2\cos A(\cos A - 1) + 2\cos B(\cos B - 1) + 2\cos C(\cos C - 1) - 3 < 0$

Vì cosA, cosB, cosC ≥ 0 và (cosA − 1), (cosB − 1), (cosC − 1) ≤ 0

nên $\cos A(\cos A - 1) \le 0$

$\cos B(\cos B - 1) \le 0$

$$\cos C(\cos C - 1) \le 0$$

Do đó, bất đẳng thức (2) luôn đúng (đpcm)

Bài 448

Tính: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$

GIẢI

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)-\sin 2x}{(1-\cos 2x)+\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x-2\sin x\cos x}{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\cos x}=\boxed{-1}$$

Bài 449

Giải phương trình: $\pi^{\left|\sin\sqrt{x}\right|}=\left|\cos x\right|$

Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội (1999

GIẢI

Phương trình đã cho: $\pi^{\left|\sin\sqrt{x}\right|}=\left|\cos x\right|$ ( )

Điều kiện: $x \ge 0$

Ta có: $\left|\sin\sqrt{x}\right| \ge 0 \Rightarrow \pi^{\left|\sin\sqrt{x}\right|} \ge \pi^0 = 1$

Vế phải $|\cos x| \le 1$

Vế trái ≥ 1, vế phải ≤ 1

Phương trình (1) có nghiệm khi $\cos x = 1$ và $\sin\sqrt{x} = 0$

Khi đó phương trình (1) tương đương:

$$\begin{cases} |\cos x| = 1 \\ |\sin\sqrt{x}| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \sqrt{x} = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = l^2\pi^2 \end{cases} \quad (k, l \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad k\pi = l^2\pi^2 \quad \Leftrightarrow \quad l^2\pi = k \quad \Leftrightarrow \quad k = 0 \Rightarrow x = 0$$

Bài 450

Giải phương trình: $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$

Đại học Thương mại (1999)

GIẢI

Ta có: $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Từ (1) suy ra: $2(\sin 3x - \cos 3x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right.$$

- Với $\cos 2x = 0$ có nghiệm $\boxed{x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}}$ $(k \in Z)$

- Với $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}} \quad (k \in Z)$$

Bài 451

Chứng minh rằng tam giác ABC có các góc A, B, C thoả mãn điều kiện: $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$ thì tam giác đó cân.

Đại học Thương mại (1999)

GIẢI

Điều kiện đã cho: $\sin\frac{A}{2}\cos^3\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{A}{2}$ (1)

Từ (1) suy ra: $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos^3\frac{A}{2}} = \dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos^3\frac{B}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2}\left(1 + tg^2\frac{A}{2}\right) = tg\frac{B}{2}\left(1 + tg^2\frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2} - tg\frac{B}{2} + tg^3\frac{A}{2} - tg^3\frac{B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(tg\frac{A}{2} - tg\frac{B}{2}\right)\left(tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + 1\right) = 0 \qquad (2)$$

$0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ và $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ thì $tg\frac{A}{2} > 0$ và $tg\frac{B}{2} > 0$

Do đó: $tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + 1 > 0$

Từ (2) suy ra: $tg\frac{A}{2} - tg\frac{B}{2} = 0$ hay $tg\frac{A}{2} = tg\frac{B}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} \quad \Leftrightarrow A = B$$

Vậy ΔABC là tam giác cân.

Bài 452

1. Giải phương trình: $\mathrm{tg}2x + \sin 2x = \frac{3}{2}\mathrm{cotg}x$

2. Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$$2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}\,(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Đại học Thuỷ lợi (1999)

GIẢI

1. Ta có: $\mathrm{tg}2x + \sin 2x = \frac{3}{2}\mathrm{cotg}x$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\\ x \neq k\pi\end{cases}$

Từ (1) ta có phương trình tương đương:

$$\mathrm{tg}2x(1 + \cos 2x) = \frac{3}{2}.\frac{\cos x}{\sin x}$$

$\Leftrightarrow$ $\sin 2x(1 + \cos 2x).2\sin x = 3\cos 2x\cos x$

$\Leftrightarrow$ $\sin 2x.2\cos^2 x.2\sin x = 3\cos 2x\cos x$

$\Leftrightarrow$ $2\sin^2 2x\cos x = 3\cos 2x\cos x$

$\Leftrightarrow$ $\cos x(3\cos 2x - 2\sin^2 2x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos x\left[3\cos 2x - 2(1 - \cos^2 2x)\right] = 0$

$\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ 2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0\end{array}\right.$

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

- Với $2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -2 \text{ (loại)}\\ \cos 2x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Hệ thức đã cho: $2\cos A\sin B\sin C + \sqrt{3}\,(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$ (2)

Tính $\cos A\sin B\sin C$

Theo định lý hàm số Cô si ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{a^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{4R^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{8R^2 \sin B \sin C}$$

$$2\cos A\sin B\sin C = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$$

Do đó (2) có thể viết:

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}\,(\cos A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 B + 1 - \cos^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}\,(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \left(\cos^2 C - \sqrt{3}\cos C\right) - \left(\cos^2 B - \sqrt{3}\cos B\right) - \left(\sin^2 A - \sqrt{3}\sin A\right) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \left[\left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] - \left[\left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] - \left[\left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right] = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos C = \cos B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0 \\ \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = C = 30^0 \\ A = 120^0 \end{cases}$$

Như vậy tam giác ABC cân có ở góc đỉnh A bằng 120^0

Bài 453

Giải phương trình: $\log_x(\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}}(\cos x + \cos 2x) = 0$

Đại học Xây dựng (1999)

GIẢI

Ta có: $\log_x(\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}}(\cos x + \cos 2x) = 0$ (2)

Biết $\log_{a^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\log_{a}N$

nên $\log_{\frac{1}{x}}(\cos x + \cos 2x) = \log_{x^{-1}}(\cos x + \cos 2x)$

$= -\log_x(\cos x + \cos 2x)$

Do đó phương trình (1) tương đương:

$$\log_x(\cos x - \sin x) = \log_x(\cos x + \cos 2x) \qquad (2)$$

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \cos x - \sin x = \cos x + \cos 2x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x < \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

Từ (2) ta có:

$\cos x - \sin x = \cos x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \qquad \text{thì } \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

- Với $\sin x = 1$ thì $\cos x - \sin x = -1 < 0$ (loại)
- Với $\sin x = -\frac{1}{2}$ thì $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi & (k \text{ nguyên} \geq 0) \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi & (\text{loại}) \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $0 < x \neq 1$, phương trình (1) có nghiệm số là:

$\boxed{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$ (k nguyên ≥ 0)

Bài 454

1. **Giải phương trình: $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$**
2. **Rút gọn biểu thức $A = 1 - \cos^6\alpha - \sin^6\alpha$**

Đại học Y khoa Hà Nội (1999)

GIẢI

1. Ta có: $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$

   Viết lại: $(\sin x + \cos x) - 4\sin^3 x = 0$

Nhân (sinx + cosx) với $\sin^2x + \cos^2x = 1$, ta được phương trình:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2x + \cos^2x) - 4\sin^3x = 0$$

$$3\sin^3x - \cos^3x - \sin^2x\cos x - \sin x\cos^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^3x + \sin^3x - \cos^3x - 2\sin^2x\cos x + \sin^2x\cos x - \sin x\cos^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2x(\sin x - \cos x) + \sin^2x(\sin x + \cos x) - \cos^2x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2x(\sin x - \cos x) + (\sin^2x - \cos^2x)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(2\sin^2x + (\sin x + \cos x)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 > 0 \end{cases}$$

Với $\sin x - \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

Cách 2. Vì cosx = 0 không phải là nghiệm của phương trình

$\sin x - 4\sin^3x + \cos x = 0$ (1)

Chia 2 vế của (1) cho $\cos^3x \neq 0$ ta được:

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x} - 4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\cos^3 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) - 4\operatorname{tg}^3x + \frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x(1 + \operatorname{tg}^2x) - 4\operatorname{tg}^3x + (1 + \operatorname{tg}^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\operatorname{tg}^3x + \operatorname{tg}^2x + \operatorname{tg}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \operatorname{tg}x)(3\operatorname{tg}^2x + 2\operatorname{tg}x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \operatorname{tg}x = 0 \\ 3\operatorname{tg}^2x + 2\operatorname{tg}x + 1 > 0, \ \forall x \qquad \text{vì } \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \text{ suy ra: } \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Rút gọn biểu thức A

$$A = 1 - \cos^6\alpha - \sin^6\alpha$$

$$= 1 - (\cos^6\alpha + \sin^6\alpha)$$

$$= 1 - \left[(\cos^2\alpha)^3 + (\sin^2\alpha)^3\right]$$

$$= 1 - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha)$$

$$= 1 - (\cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha)$$

$$= 1 - [(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha]$$

Biết $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ nên $\sin^2 2\alpha = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\Longrightarrow \quad 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

Do đó : $A = 1 - \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha\right)$

Vậy biểu thức A rút gọn là :

$$\boxed{A = \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha}$$

ĐỀ THI NĂM 2000

BÀI 455 - 456

1. Tìm x nguyên thoả mãn: $\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=1$

2. Các góc của Δ ABC thoả mãn:

$$\sin A+\sin B+\sin C-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=2\sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh C = 120^0

Đại học An ninh Nhân Dân (2000, A)

GIẢI

1. Tìm x nguyên thoả mãn

$$\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=1 \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)=2k\pi \quad (k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-\sqrt{9x^2-16x-80}=8k \qquad (k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-8k=\sqrt{9x^2-16x-80} \qquad (2)$$

Với $3x-8k\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{8k}{3}$ (3)

Bình phương hai vế (2) ta được:

$$9x^2-16x-80=(3x-8k)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{4k^2+5}{3k-1}=\frac{4k}{3}+\frac{4}{9}+\frac{49}{9(3k-1)}$$

$$9x=12k+4+\frac{49}{3k-1} \qquad (4)$$

Nếu x là nghiệm nguyên thì $\frac{49}{3k-1}$ là số nguyên

$$\Rightarrow \quad \frac{49}{3k-1}\in Z \Rightarrow 3k-1 \text{ là ước số của } 49$$

$$\Rightarrow \quad 3k-1\in\{\pm 1;\pm 7;\pm 49\}$$

$$\Rightarrow \quad 3k\in\{2;8;50;0;-6;-48\}$$

$$\Rightarrow \quad k\in\{0;-2;-16\}$$

Thử lại với k = 0 thì (3) và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 9x=4-\dfrac{49}{1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ x=-5\end{cases}$

Hệ này vô nghiệm.

* Với k = -2 thì (3) và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{16}{3}\\ 9x=-20-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{16}{3}\\ x=-3\end{cases}$

* Với k = -16 thì (3) và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{128}{3}\\ 9x=-188-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{128}{3}\\ x=-21\end{cases}$

Vậy số x nguyên cần tìm là $\boxed{x=-3}$ và $\boxed{x=-21}$

2. Chứng minh C= 120^0

Ta có: $\sin A+\sin B+\sin C-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\left(2\cos\frac{C}{2}-1\right)=0$$

Do $\cos\dfrac{A}{2}>0$, $\cos\dfrac{B}{2}>0$ nên ta có $2\cos\dfrac{C}{2}-1=0\Leftrightarrow C=120^0$

BÀI 457 - 458

1. Giải phương trình : $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x + \cos x$

2. Tìm k nguyên dương để phương trình:

$$2\sin^2 x + 6\cos^2 \frac{x}{2} = 5 - 2k \quad \text{có nghiệm.}$$

Tìm nghiệm khi k = 1

Đại học An ninh Nhân Dân (2000,D)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x + \cos x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sin^3 x + \sin x + \cos x - \cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 + \sin^2 x) + \cos x(1 - \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 + \sin^2 x) + \cos x \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 + \sin^2 x + \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow & x = k\pi \ (k \in Z) \\ 1 + \sin^2 x + \sin x \cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow 1 + \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sin 2x + \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + (1 + \sin 2x) + \sin^2 x = 0$$

Vế trái $\geq 1 > 0$, vô nghiệm

2. Tìm k nguyên dương để phương trình sau có nghiệm

$$2\sin^2 x + 6\cos^2 \frac{x}{2} = 5 - 2k \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3(1 + \cos x) = 5 - 2k$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x = 2k \quad (2)$$

Đặt t = cosx, $-1 \leq t \leq 1$ ta có: $f(t) = 2t^2 - 3t$

Xét $f'(t) = 4t - 3 = 0$ khi $t = \frac{3}{4}$

t	-1		$\frac{3}{4}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	5	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	-1

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{9}{8} \le 2k \le 5$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{16} \le 2k \le \frac{5}{2}$$

Kết hợp với $k \in Z^+$ ta có nghiệm $k = 1 \vee k = 2$

Khi $k = 1$ ta có phương trình: $2\cos^2 x = 3\cos x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 2 \text{ (loại)} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in Z)$$

BÀI 459

Giải phương trình : $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$

Đại học Cảnh sát Nhân Dân (2000, D)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$ (1)

Từ (1) suy ra:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x) = 2\sin x\cos x + \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 2\sin x\cos x + (\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\sin x\cos x + 2\sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos x[\sin x + \cos x + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x\cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < -1 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2}} \ (k \in Z)$$

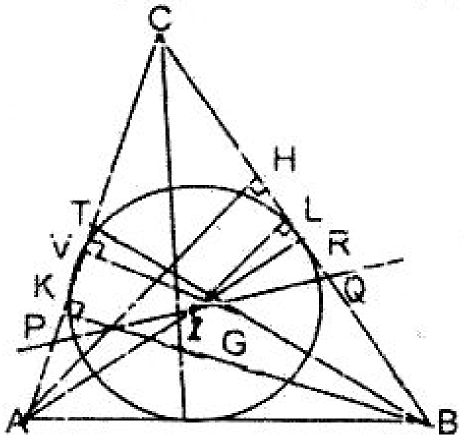
BÀI 460

Cho tam giác ABC có đường thẳng qua trọng tâm G và tâm đường tròn nối tiếp I vuông góc với đường phân giác trong của góc C, gọi a, b, c là cạnh tương ứng của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{2ab}{a+b}$

Đại học Cảnh sát Nhân dân (2000, A)

GIẢI

Gọi I là tâm đường tròn nối tiếp và r là bán kính; G là trọng tâm, d_a, d_b là khoảng cách từ G đến cạnh a, b.



$\Delta AHR \sim \Delta GLR$

suy ra $GL = d_a = \dfrac{1}{3}h_a$

$\Delta GVT \sim \Delta BKT$

suy ra $GV = d_b = \dfrac{1}{3}h_b$

Ta có: $dt\Delta CPQ = dt\Delta CPI + dt\Delta CIQ = \dfrac{1}{2}r.CP + \dfrac{1}{2}r.CQ$

$$= \frac{1}{2}r(CP + CQ) = rCP \qquad (1)$$

vì $CP = CQ$ do ΔCPQ cân

$$dt\,\Delta CPQ = dt\Delta CPG + dt\Delta CGQ = \frac{1}{2}GV.CP + \frac{1}{2}GL.CQ$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}h_bCP + \frac{1}{2}.\frac{2}{3}h_aCQ = \frac{1}{6}(h_b + h_a)CP \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $r\,CP = \dfrac{1}{6}(h_b + h_a)CP$

$$r = \frac{1}{6}(h_a + h_b) \Rightarrow \frac{S}{p} = \frac{1}{6}\left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b} = \frac{p}{3} \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{2p}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}} \text{(đpcm.)}$$

BÀI 461

Chứng minh rằng nếu A, B,C là ba góc trong một tam giác thì:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1$$

Cao đẳng Công nghiệp Hà Nội (2000)

GIẢI

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2} + 1$$

Cộng thêm cos (A + B + C) = cos π = -1 vào vế trái của đẳng thức này, ta được: cosA + cosB + cosC + cos (A + B + C) =

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{C+(A+B+C)}{2}\cos\frac{C-A-B-C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B+2C}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

Do đó: $\cos A+\cos B+\cos C-1 = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$

$\Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}+1$ (đpcm)

BÀI 462

Biết rằng ba góc A, B và C của tam giác thỏa mãn hệ thức

$$\mathrm{Sin}^2A + \sin^2B + \sin^2C = m$$

Chứng minh rằng nếu m = 2 thì ABC tam giác là vuông, nếum > 2 thì ABC là tam giác nhọn và nếu m < 2 thì tam giác có góc tù.

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông (2000)

GIẢI

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\sin^2 C$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \sin^2C$$

$$= 1- \cos(A + B)\cos(A - B) + 1 - \cos^2C$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A-B)-\cos C)]$$

$$= 2 + \cos C[\cos(A-B)+\cos (A+B)]$$

$$= 2 + \cos A\cos B\cos C$$

Nếu m = 2.

suy ra: $2\cos A\cos B\cos C = 0$

$\cos A = 0$, $\cos B = 0$ hoặc $\cos C = 0$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A hoặc B hoặc C

Nếu m < 2,

suy ra: $2\cos A\cos B\cos C < 0$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C < 0$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC có một góc tù và 2 góc nhọn.

Nếu m > 2,

suy ra : $\cos A\cos B\cos C > 0$

$\Rightarrow$ Tam giác ABC có ba góc nhọn.

BÀI 463

1. Cho hai số a, b thoả mãn điều kiện $a+b\geq 0$, chứng tỏ rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$

2. Trong mọi tam giác ABC những tam giác nào làm cho biểu thức sau:

$$\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}$$ đạt giá trị lớn nhất ?

Đại học Bách khoa Hà Nội (2000)

GIẢI

1. Chứng minh: $$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad 4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3\\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)\,[4(a^2-ab+b^2)-(a^2+2ab+b^2)]\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)(3a^2+3b^2-6ab)\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad 3(a+b)\,(a-b)^2\geq 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Với điều kiện $a+b\geq 0$ nên (2) luôn đúng.

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi $a=b$

2. Theo câu 1 ta suy ra:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{2}\right)^3\leq\frac{\sin B+\sin C}{2}=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\leq\cos\frac{A}{2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}}{2}\leq\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}$$

Tương tự: $$\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin C}}{2}\leq\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}}{2}\leq\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một, ta được:

$$\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}} \le 1$$

Biểu thức trên đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi:

$$\sqrt[3]{\sin A} = \sqrt[3]{\sin B} = \sqrt[3]{\sin C}$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} = 1$$

$\Leftrightarrow$ A = B = C $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} \le \sqrt{\frac{a^2}{4bc}} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra dấu " = " xảy ra khi b = c

Tương tự ta có: $\sin\frac{B}{2} \le \frac{b}{2\sqrt{ac}}$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra dấu " = " xảy ra khi a = c

Vậy ABC là tam giác đều.

BÀI 464

Các góc A, B, C của tam giác ABC thỏa mãn:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{9}{4}$$

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều

Đại học Dân lập Đông Đô (2000A)

GIẢI

Ta có: $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} = \frac{9}{4}$ (1)

Tính: $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} + \cos\frac{\pi}{6} \le 2\cos\frac{A+B}{4} + 2\cos\left(\frac{C}{4} + \frac{\pi}{12}\right)$

$$= 4\cos\left(\frac{A+B+C}{8}+\frac{\pi}{24}\right)$$

$$= 4\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le 2\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Biết: $(ab + bc + ac) \le \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

$$\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\right) \le \frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2}{3}$$

$$\le \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{27}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $A = B = C \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

BÀI 465

A, B, C, là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

nếu $\cot g\frac{A}{2}, \cot g\frac{B}{2}, \cot g\frac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng (theo thứ tự đó) thì $\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2} = 3$

Đại học Giao thông (cơ sở II) TP.Hồ Chí Minh (2000)

GIẢI

Biết $\cot g\frac{A}{2}, \cot g\frac{B}{2}, \cot g\frac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng nên:

$$2\cot g\frac{B}{2} = \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2tg\frac{A+C}{2} = \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\,\frac{\dfrac{1}{\cot g\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cot g\frac{C}{2}}}{1-\dfrac{1}{\cot g\frac{A}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cot g\frac{C}{2}}}=\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\,\frac{\cot g\frac{C}{2}+\cot g\frac{A}{2}}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}-1}=\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Chia 2 vế của (2) cho $\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{C}{2}>0$ ta được:

$$\frac{2}{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}-1}=1$$

$$\Rightarrow \qquad \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{C}{2}=3$$

BÀI 466

Cho $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ và các số cotgA, cotgB, cotgC theo thứ tự lập thành một số cộng.

Tính giá trị của biểu thức cotgAcotgC.

Đại học Giao thông (cơ sở II) TP.Hồ Chí Minh (2000)

GIẢI

Biết: $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ và $\cot gA+\cot gC=2\cot gB \qquad (1)$

Ta có : $\cot g(A+B)=\cot g\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\mathrm{tg}C=\frac{1}{\cot gC}$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\cot gA\cot gB-1}{\cot gA+\cot gB}=\frac{1}{\cot gC}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \cot gA\cot gB\cot gC-\cot gC=\cot gA+\cot gB$$

$$\Leftrightarrow \qquad \cot gA+\cot gB+\cot gC=\cot gA\cot gB\cot gC \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$3\cot g B = \cot g A \cot g B \cot g C$$

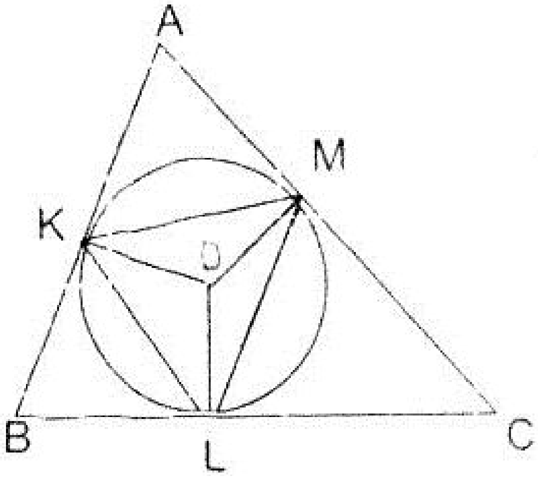
$$\Rightarrow \quad \cot g A \cot g C = 3$$

BÀI 467

Đường tròn nội tiếp tam giác **ABC tiếp xúc với các cạnh AB,** BC, CA, lần lượt tại K, L, M. Gọi **S là diện tích tam giác ABC, là** diện tích tam giác KLM. Chứng **minh rằng:**

$$s = 2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Học viện Quan hệ Quốc tế



GIẢI

Ta có: OK = OM = OL = r = bán kính đường tròn nội tiếp giác ABC thì r lại là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

$K\widehat{L}M = \pi - A$

$$\widehat{KLM} = \frac{1}{2}\widehat{KOM} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

nên sin $\widehat{KLM}$ =

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

Trong tam giác KLM theo định lý hàm số sin, ta có:

$$\frac{KM}{\sin\widehat{KLM}} = 2r \text{ hay } KM = 2r\sin\widehat{KLM} = 2r\cos\frac{A}{2}$$

$$= (p - a)\,tg\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= (b + c - a)\sin\frac{A}{2}$$

Do đó : $$\frac{KM}{BC} = \frac{(b + c - a)\sin\frac{A}{2}}{a}$$

$$= \frac{(\sin B + \sin C - \sin A)}{\sin A}\sin\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin\frac{A}{2}$$

$$= \cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{ML}{BA} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$ (2)

Nhân (1) và (2) ta có: $\frac{KM.ML}{BC.BA} = 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$ (3)

Biết s = $\frac{1}{2}$ KM.ML sin $\widehat{KML}$ = $\frac{1}{2}$KM.ML $\cos\frac{B}{2}$

suy ra: KM.ML = $\frac{2s}{\cos\frac{B}{2}}$ (4)

$$S = \frac{1}{2}BC.BA\sin B \text{ suy ra: } BC.BA = \frac{2S}{\sin B} \quad (5)$$

Thế (4) và (5) vào vế trái của (3) và rút gọn ta được:

$$s = 2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \text{ (đpcm).}$$

BÀI 468

Chứng minh trong tam giác ABC để có A = 2B điều kiện cần và đủ là $a^2 = b^2 + bc$

Học viện Kỹ thuật Quân sự

GIẢI

Ta có: $a^2 = b^2 + bc$

Từ định lý hàm số sin suy ra a = 2RsinA; b = 2RsinB và c = 2RsinC. Từ (1) ta có hệ thức tương đương với:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\sin C$$

Vế trái: $\frac{1-\cos 2A}{2} - \frac{1-\cos 2B}{2} = \frac{\cos 2B - \cos 2A}{2}$

$$= \sin(A+B)\sin(A-B)$$

$$= \sin C \sin (A - B)$$

Vậy.

(2) $\Leftrightarrow \sin C \cdot \sin(A - B) = \sin B \cdot \sin C$

Vi $\sin C > 0$ nên $\quad \sin (A - B) = \sin B \qquad (3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A - B = B + 2k\pi \\ A - B = \pi - B + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} A=2B+2k\pi \text{ với k nguyên, chỉ có } k=0 \text{ là thich hợp, vậy } A=2B \\ A = \pi + 2k\pi \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy để có $A = 2B$ thi điều kiện cần và đủ là $a^2 = b^2 + bc$

BÀI 469

a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện a<b<c. Hãy chứng minh rằng:

$$a^3 (b^2 - c^2) + b^3 (c^2 - a^2) + c^3 (a^2 - b^2) < 0$$

Đại học Ngoại ngữ Hà Nội

GIẢI

$$a^3 (b^2 - c^2) + b^3 (c^2 - a^2) + c^3 (a^2 - b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^3b^2 - a^3c^2 + b^3c^2 - b^3a^2 + c^3 (a^2 - b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b^2 (a - b) - c^2 (a^3 - b^3) + c^3 (a^2 - b^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b) [a^2b^2 - c^2a^2 - c^2ab - c^2b^2 + c^3 (a - b)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b) [a^2(b^2 - c^2) - ac^2 (b-c) - c^2b (b - c)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b) (b - c) [a^2 (b + c) -ac^2 - c^2b] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b) (b - c) [b (a^2 - c^2) + ac (a - c)] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b) (b - c) (a - c) (ba + bc + ac) < 0$$

Với $a < b < c$ thì bất đẳng thức trên luôn đúng

BÀI 470

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

Đại học Quốc gia Hà Nội (2000, D)

GIẢI

Ta có:

$$\sin A + \sin B - \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\left(-\frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\cos A + \cos B - \cos C + 1 = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}.2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)$$

$$= 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

Do đó:

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}cotg\frac{C}{2}$$

BÀI 471

Chứng minh rằng với mọi tam giác với mọi tam giác ABC, ta có:

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27$$

Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh (2000 A,B)

GIẢI

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)\geq 27$$

Biết $(1+a)(1+b)(1+c) = abc+(ab+ac+bc)+(a+b+c)+1$

và $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2} > 0$

nên $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) =$

$$\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{3}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)+1$$

$$\geq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right)^{2}}+3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}+1$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\right)^{3} \qquad (1)$$

Tính: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ta được $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$

suy ra: $\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\leq\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} \ge \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Do đó (1)⇒ $\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\right) \ge (1+2)^3 = 27$

Dấu "đẳng thức" xảy ra khi:

$$\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C$$

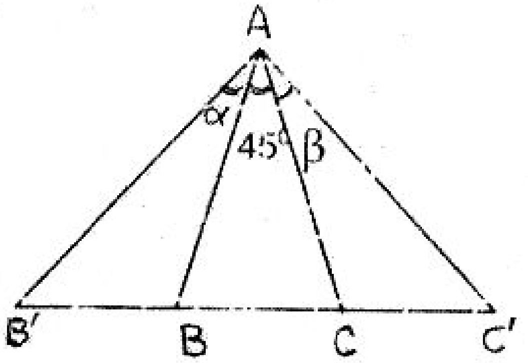
BÀI 472

Cho tam giác ABC có góc A = 45°. Kéo dài cạnh BC về pha B một đoạn BB' và kéo dài về phía C một đoạn CC' sao cho BB' = BC = CC'. Đặt α = B'AB; β = CAC'. Chứng minh rằng:

$(1 + \text{cotg}\alpha)(1 + \text{cotg}\beta) = 8$

Đại học Sư phạm Quy Nhơn (2000B)

GIẢI



Ta có:

$(1+\text{cotg}\alpha)(1+\text{cotg}\beta) =$

$=(\text{cotg}45^0+\text{cotg}\alpha)(\text{cotg}45^0+\text{cotg}\beta)$

$$= \frac{\sin(45^0+\alpha)}{\sin 45^0 \sin\alpha}\cdot\frac{\sin(45^0+\beta)}{\sin 45^0 \sin\beta}$$

$$= \frac{\sin(45^0+\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(45^0+\beta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta}$$

$$= \frac{2\sin(\alpha+45^0)\sin(\beta+45^0)}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Gọi S là diện tích tam giác AB'C bằng diện tích tam giác ABC'

Ta có: $S = \frac{1}{2}AB'.AC\sin(\alpha+45^0) \Rightarrow \sin(\alpha+45^0) = \frac{2S}{AB'.AC}$ (2)

$$S = \frac{1}{2}AB.AC'\sin(\beta+45^0) \Rightarrow \sin(\beta+45^0) = \frac{2S}{AB.AC'} \quad (3)$$

Biết $dt\Delta AB'B = \frac{1}{2}dt\Delta AB'C = \frac{1}{2}S$

$$\frac{1}{2}AB'.AB\sin\alpha = \frac{1}{2}S$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{S}{AB'.AB} \quad (4)$$

Tương tự:

$$dt\Delta ACC' = \frac{1}{2}dt\Delta ABC' = \frac{1}{2}S$$

$$\frac{1}{2}AC'.AC\sin\beta = \frac{1}{2}S$$

$$\Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{S}{AC'.AC} \quad (5)$$

Thế (2), (3), (4) và (5) vào (1) ta được:

$$(1+\text{cotg}\alpha(1+\text{cotg}\beta) = \frac{2.\dfrac{2S}{AB'.AC}.\dfrac{2S}{AB.AC'}}{\dfrac{S}{AB'.AB}.\dfrac{S}{AC'.AC}} = 8$$

BÀI 473

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Đại học Sư phạm - Vinh (2000,D)

GIẢI

Ta phải chứng minh: $\cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ **(1)**

-Nếu ABC là tam giác có một góc tù, giả sử $A > 90^0$ thì $\cos A < 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0$.

Vế trái của (1) < 0 còn vế phải của (1) > 0 nên (1) luôn luôn đúng.

-Nếu ABC là tam giác vuông, giả sử $A=90^0$ thì $\cos A=0$ suy ra (1) luôn đúng.

-Nếu ABC có ba góc đều nhọn thì cosA, cosB, cosC đều có giá trị dương. Ta có:

$$\sqrt{\cos B\cos C} \le \frac{1}{2}(\cos B + \cos C) = \cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\cos B\cos C} \le \sin\frac{A}{2} \qquad (1)$

Tương tự $\quad \sqrt{\cos A\cos C} \le \sin\frac{B}{2} \qquad (2)$

$\sqrt{\cos B\cos C} \le \sin\frac{C}{2} \qquad (3)$

Nhân từng vế (1), (2) và (3) ta được:

$$\sqrt{\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C} \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \cos A\cos B\cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (đpcm).

BÀI 474

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \ge 6$$

Đại học Sư phạm - Vinh (2000D)

GIẢI

$$\frac{2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{2\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} \ge$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C + \sin A}{\sin B} \ge 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A}\right) + \left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right) + \left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) \ge 6 \ (1)$$

Biết $\quad \frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} \ge 2; \qquad \frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B} \ge 2$

và $\quad \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} \ge 2$ nên (1) luôn đúng

BÀI 475

Tam giác ABC nội tiếp một đường tròn có bán kính bằng 2 và các góc thỏa mãn cotgA = 2cotgB = 3cotgC. Chứng minh tam giác ABC là tam giác nhọn và tính cạnh a, b, c của tam giác đó.

Đại học Sư phạm - Vinh (2000,A,B,E)

GIẢI

Ta có $\text{cotg}(B+C) = \dfrac{\cot gB \cot gC - 1}{\cot gB + \cot gC}$

$\Leftrightarrow \quad -\text{cotg}A = \dfrac{\cot gB \cot gC - 1}{\cot gB + \cot gC}$

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}A\,\text{cotg}B + \text{cotg}B\,\text{cotg}C + \text{cotg}A\,\text{cotg}C = 1$

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}A\dfrac{1}{2}\cot gA + \dfrac{1}{2}\cot gA.\dfrac{1}{3}\cot gA + \cot gA\dfrac{1}{2}\cot gA = 1$

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}A = \pm 1$

- Với cotgA = -1 thì $\text{cotg}B = -\dfrac{1}{2}$ và $\text{cotg}C = -\dfrac{1}{3}$

Như vậy các góc A, B, C đều là góc tù, vô lý.

- Với cotgA = 1 thì $\text{cotg}B = \dfrac{1}{2}$ và $\text{cotg}C = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow A = 45^0$, B và C là các góc nhọn

Ta có : $1 + \text{cotg}^2B = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\sin^2 B} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 B = \dfrac{4}{5}$

Tương tự ta có: $\quad \sin^2C = \dfrac{9}{10}$; $\quad \sin^2A = \dfrac{1}{2}$

$$a = 2R\sin A = 2.2\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$b = 2R\sin B = 2.2\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$c = 2R\sin C = 2.2.\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{5}\sqrt{10}$$

BÀI 476

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}\geq 9$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Đại học Sư phạm Hà Nội (2010,A)

GIẢI

Chứng minh: $\cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}\geq 9$

Ta có:

$$\left(1\cot g\frac{A}{2}+1\cot g\frac{B}{2}+1\cot g\frac{C}{2}\right)^2\leq 3\left(\cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cot g^2\frac{A}{2}+\cot g^2\frac{B}{2}+\cot g^2\frac{C}{2}\geq\frac{1}{3}\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Biết: $\cot g\frac{A}{2}=tg\frac{B+C}{2}=\dfrac{1}{\cot g\frac{B+C}{2}}=\dfrac{\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}}{\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}-1}$

$$\Leftrightarrow \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}-\cot g\frac{A}{2}=\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}=\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2} \quad (2)$$

Với 3 số dương $\cot g\frac{A}{2}$, $\cot g\frac{B}{2}$, $\cot g\frac{C}{2}$ ta cũng có:

$$\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\geq 3\sqrt[3]{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)\geq 27\left(\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}\right) \quad (3)$$

Thế (2) vào (3) ta được:

$$\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)\geq 27\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right)^2\geq 9 \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra:

$$\text{cotg}^2\frac{A}{2} + \text{cotg}^2\frac{B}{2} = \text{cotg}^2\frac{C}{2} \geq 9 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\text{cotg}\frac{A}{2} = \text{cotg}\frac{B}{2} = \text{cotg}\frac{C}{2} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

BÀI 477

Kýhiệu a, b, c là độ dài ba cạnh và S là diện tích một tam giáctùy ý.

a. Chứng minh rằng : $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$

b. Từ đó hãy chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

Đại học Dân lập Hùng Vương (2000, B)

GIẢI

a. Chứng minh: $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$

áp dụng công thức Hêrông:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \quad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$= \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$$

$$16S^2 = [(b+c+a)(b+c-a)][(a+(c-b)][a-(c-b)]$$

$$= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (c-b)^2]$$

$$= (b+c)^2a^2 - (c+b)^2(c-b)^2 - a^4 + a^2(c-b)^2$$

$$= a^2b^2 + 2bca^2 + a^2c^2 - (c^2-b^2)^2 - a^4 + a^2c^2 - 2a^2bc + a^2b^2$$

$$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - (c^4 - 2b^2c^2 + b^4) - a^4$$

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

b. Biết $a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$

$$\Rightarrow \quad 2(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4$$

Vậy $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

BÀI 478

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}}{\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}} = 1$$

Đại học Dân lập Hải Phòng (2000)

GIẢI

Ta có: $\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$

$$= \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}}{1 - \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}}$$

$$= \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} - \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}} = 1 \text{ (đpcm))}$$

BÀI 479

Với A, B, C là ba góc của một gam giác. Chứng minh rằng:

$\operatorname{tg}5A + \operatorname{tg}5B + \operatorname{tg}5C = \operatorname{tg}5B\operatorname{tg}5C$

Đại học Dân lập Hải Phòng (2000)

GIẢI

Biết $A + B + C = \pi \Rightarrow 5C = 5\pi - (5A + 5B)$

$$\operatorname{tg}5C = \operatorname{tg}[(5\pi - (5A + 5B))] = \operatorname{tg}[\pi - (5A + 5B)$$

$$= -\operatorname{tg}(5A + 5B).$$

$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{tg}5C = -\dfrac{\operatorname{tg}5A + \operatorname{tg}5B}{1 - \operatorname{tg}5A\operatorname{tg}5B}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{tg}5C - \operatorname{tg}5A\operatorname{tg}5B\operatorname{tg}5C = -\operatorname{tg}5A - \operatorname{tg}5B$$

$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{tg}5A + \operatorname{tg}5B + \operatorname{tg}5C = \operatorname{tg}5A\operatorname{tg}5B\operatorname{tg}5C \text{ (đpcm).}$$

BÀI 480

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu các góc của nó thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Đại học Tài chính Kế toán Hà Nội (2000)

GIẢI

Biết sinA, sinB, sinC > 0 nên:

$$\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin B\sin C}}\ge\frac{2}{\frac{\sin B+\sin C}{2}}\ge\frac{2}{\cos\frac{A}{2}}\quad(1)$$

Tương tự: $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin C}\ge\frac{2}{\cos\frac{B}{2}}$ (2)

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\ge\frac{2}{\cos\frac{C}{2}}\quad(3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một ta được:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\ge\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$$

Dấu "=" xảy ra khi A = B = C ⇔ ΔABC đều

Bài 481

Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu cotgA, cotgB, cotgC theo thứ tự tạo thành cấp số cộng thì a^2, b^2, c^2 cũng tạo thành cấp số cộng.

Đại học Thương mại (2000)

GIẢI

Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\sin A\,\text{cotg}A\\&=b^2+c^2-4S\,\text{cotg}A\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\qquad \text{cotg}A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

Tương tự ta có:

$$\cot gB = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$

$$\cot gC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

Biết cotgA, cotgB, cotgC tạo thành một cấp số cộng nên:

$$2\text{cotg}B = \text{cotg}A + \text{cotg}C$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(c^2 + a^2) = 4b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 + a^2 = 2b^2 \qquad (1)$$

(1) chứng tỏ a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng.

BÀI 482

1. Cho B, C là hai góc nhọn của tam giác ABC có tính chất:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 1$$

Chứng minh rằng khi đó tam giác ABC vuông tại A.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH = 1 và diện tích $S_{\Delta ABC} = 1$. Tính độ dài các cạnh của ΔABC.

Đại học Văn hóa (2000)

GIẢI

1. Ta có: $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} = 1$$

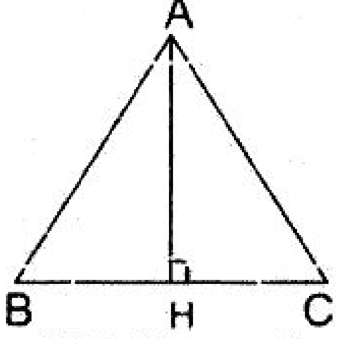
$$\Leftrightarrow \quad \cos(B + C)\cos(B - C) = 0$$

Vì B, C là góc nhọn nên cos (B - C) ≠ 0 nên chỉ có

$$\cos(B + C) = 0 \Rightarrow B + C = 90^0 \Rightarrow A = 90^0.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A.

2. Gọi cạnh huyền của tam giác BC = a



Diện tích $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.AH = \frac{1}{2}.a.1 \Rightarrow a = 2$

Như vậy ABC là tam giác vuông , có đường cao AH bằng nửa cạnh huyền nên đường AH cũng là trung tuyến

ABC là tam giác vuông cân có các cạnh: AB = AC ⇒ $AB^2 + AC = BC^2 = 2AB^2 = 2^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

Các cạnh của tam giác vuông góc là AB = AC = $\sqrt{2}$ và BC =

BÀI 483

1. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$

Đại học Y Hải Phòng (2000)

GIẢI

Biết (b + c - a), (c + a - b) và (a + b - c) là các số dương, áp dụng bất đẳng thức Côsi với hai số dương ta có:

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\leq\frac{b+c-a+c+a-b}{2}=c \qquad (1)$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\leq\frac{c+a-b+a+b-c}{2}=a \qquad (2)$$

$$\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}\leq\frac{b+c-a+a+b-c}{2}=b \qquad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) từng vế một, ta được:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leq abc$$

$$\Rightarrow \frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\geq 1$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Côsi với ba số dương

$\frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$ và $\frac{c}{a+b-c}$ ta có :

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c}}\geq 3$$

BÀI 484

Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao của tam giác có bán kính vòng tròn nội tiếp bằng r. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_b}{h_a^2}+\frac{h_c}{h_b^2}+\frac{h_a}{h_c^2}\geq\frac{1}{r}$$

Đại học Y Dược TP. Hồ Chí Minh (2000)

GIẢI

Biết $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, suy ra:

$$h_a=\frac{2S}{a}, h_b=\frac{2S}{b}, h_c=\frac{2S}{c}$$

nên ta phải chứng minh:

$$\frac{2S}{b}\left(\frac{a}{2S}\right)^2+\frac{2S}{c}\left(\frac{b}{2S}\right)^2+\frac{2S}{a}\left(\frac{c}{2S}\right)^2\geq\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{2S}{r}=2p$$

Ta cũng có: $a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow \frac{a^2}{b}\geq 2a-b$ (1)

Tương tự : $b^2+c^2\geq 2bc\Rightarrow \frac{b^2}{c}\geq 2b-c$ (2)

$a^2+c^2\geq 2ac\Rightarrow \frac{c^2}{a}\geq 2c-a$ (3)

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c=2p$$

Vậy với mọi tam giác ABC có ba đường cao h_a, h_b, h_c và bán kính đường tròn nội tiếp r ta có:

$$\frac{h_b}{h_a^2}+\frac{h_c}{h_b^2}+\frac{h_a}{h_c^2}\geq\frac{1}{r}$$

BÀI 485

Tam giác ABC vuông góc tại A có BC = a, AB = c, AC = b.
Chứng minh: $b^{2n}+c^{2n}\leq a^{2n}$ $\forall n\in N$.

Học viện Quân y (2000)

GIẢI

Tam giác ABC vuông góc tại A $\Rightarrow$ a = BC là cạnh huyền nên $\frac{b}{a}<1$; $\frac{c}{a}<1$. Khi đó: $\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}+\left(\frac{c}{a}\right)^{2n}\leq\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1$

$\Rightarrow\quad b^{2n}+c^{2n}\leq a^{2n}$ (đpcm)

Bài 486

Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases}\dfrac{1+\cos C}{\sin C}=\dfrac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}}\\ a^2(b+c-a)=b^3+c^3-a^3\end{cases}$$

Đại học Y Thái Bình (2000)

GIẢI

$$\begin{cases} \dfrac{1+\cos C}{\sin C} = \dfrac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}} & (1) \\ a^2(b+c-a) = b^3+c^3-a^3 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{1+\cos C}{\sin C} = \frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \cot g\frac{C}{2}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $\text{cotg}\,\dfrac{C}{2} = \dfrac{2a+b}{\sqrt{4a^2-b^2}}$

$\Leftrightarrow$ $\text{cotg}^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{(2a+b)^2}{4a^2-b^2} = \dfrac{2a+b}{2a-b}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} - 1 = \dfrac{2a+b}{2a-b}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = \dfrac{2a+b}{2a-b} + 1 = \dfrac{4a}{2a-b}$

$\Leftrightarrow$ $2a - b = 4a\sin^2\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow$ $b = 2a\left(1 - 2\sin^2\dfrac{C}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ $b = 2a.\cos C$

$\Leftrightarrow$ $\sin B = 2\sin A.\cos C$

$\Leftrightarrow$ $\sin(A + C) = 2\sin A\,.\,\cos C$

$\Leftrightarrow$ $\sin(A - C) = 0$

Do $-\pi < A - C$ nên suy ra $A - C = 0 \Rightarrow A = C$

(2) $\Leftrightarrow$ $a^2(b + c - a) = b^3 + c^3 - a^3$

$\Leftrightarrow$ $a^2(b + c) = b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 + c^2 - bc)$

$\Rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\Leftrightarrow$ $b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc$

$\Rightarrow$ $\cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy ABC là tam giác đều.

Bài 487

Giải phương trình $3tg^2x + 4\,tgx + 4cotgx + 3cotg^2x + 2 = 0$

Cao đẳng Hải Quan (2000)

Giải

$$3tg^2x + 4\,tgx + 4cotgx + 3cotg^2x + 2 = 0 \quad (1)$$

$(1) \Leftrightarrow 3(tg^2x + cotg^2x + 2) + 4\,(tgx + cotgx) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 3(tgx + cotgx)^2 + 4\,(tgx + cotgx) - 4 = 0$

Đặt $t = tgx + cotgx$; $(|t| \geq 2)$ ta có phương trình :

$$3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2}{3} \quad (\text{loại}) \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Với $t = -2$ $\Rightarrow tgx + cotgx = -2$

$\Leftrightarrow tgx + \dfrac{1}{tgx} = -2$

$\Leftrightarrow tg^2x + 2tgx + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (tgx + 1)^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow tgx = -1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$

Bài 488 - 489

1. Giải phương trình: $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$y = 2\cos^2x - 3\sqrt{3\cos x} - \sin^2x + 5$

Cao đẳng Kiểm soát (2000)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0 \qquad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{5\sin x + \cos 2x} = -2\cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\cos x \geq 0 \\ 5\sin x + \cos 2x = 4\cos^2 x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x \leq 0 \\ 5\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 4(1 - \sin^2 x) \end{array}\right.$$

Giải ra ta được các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in z) \\ \cos\frac{\pi}{6} > 0 (\text{loai}) \end{array}\right.$$

$$\vee \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in z) \\ \cos\frac{5\pi}{6} < 0 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in z)$

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$y = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3\cos x} - \sin^2 x + 5$$

$(1) \Leftrightarrow \quad y = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3\cos x} - (1-\cos^2 x) + 5$

$$= 2\cos^2 x - 3\sqrt{3\cos x} + \cos^2 x + 4$$

$$= 3\cos^2 x - 3\sqrt{3\cos x} + 4$$

Đặt $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$ ta có:

$$y = 3t^2 - 3\sqrt{3}\,t + 4$$

Xét $y' = 6t - 3\sqrt{3}$, $y' = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Bảng biến thiên

t	-1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		1
y'		-	0	+	
y	$7+3\sqrt{3}$	↘	$\frac{7}{4}$	↗	$7 - 3\sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $7+3\sqrt{3}$ và giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{7}{5}$.

Bài 490-491

1. Giải phương trình:

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2 + \cos x \cos 2x \cos 3x$$

2. Cho tam giác ABC bất kỳ. Chứng minh:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C$$

Đại học Dược Hà Nội (2010)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2 + \cos x \cos 2x \cos 3x$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \quad 2\cos 3x \cos x + 2\cos^2 3x - 1 = 2 + \cos x \cos s2x \cos 3x$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 3 + \cos x \cos 2x \cos 3x$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos 3x \cos 2x \cos x = 3 + \cos x \cos 2x \cos 3x$

$\Leftrightarrow \quad \cos x \cos 2x \cos 3x = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \cos x = 1 & \cos 3x \cos 2x = 1 \\ \cos x = -1 & \cos 3x \cos 2x = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \cos x = 1 & (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) = 1 \\ \cos x = -1 & (4\cos^3 x - 3\cos x)(2\cos^2 x - 1) = -1 \end{array}\right.$$

Giải ra ta được các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in Z)$$

Cách khác: $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2 + \cos x \cos 2x \cos 3x$

Biến đổi vế phải $2 + \cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 2x(\cos 4x + \cos 2x)$

Đặt t = cos2x với $-1 \leq t \leq 1$ ta được phương trình:

$$t + 2t^2 - 1 + 4t^3 - 3t = 2 + \frac{1}{2}t(2t^2 - 1 + t)$$

$\Leftrightarrow \quad 2(4t^3 + 2t^2 - 2t - 3) = 2t^3 + t^2 - t$

$\Leftrightarrow \quad 6t^3 + 3t^2 - 3t - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2t^3 + t^2 - t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (t-1)(2t^2+3t+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ 2t^2+3t+2=0 \ \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \qquad \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi}\ (k \in Z)$$

2. Chứng minh rằng:

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \geq \cos A \cos B \cos C \quad \forall \Delta\, ABC$$

- TH1: Δ ABC vuông hoặc tù

$$\Leftrightarrow \quad (1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \geq \cos A \cos B \cos C$$

- TH2: Δ ABC nhọn

$$\text{đpcm} \Leftrightarrow \left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{C}{2}\right) \geq \frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}} \cdot \frac{1-tg^2\frac{B}{2}}{1+tg^2\frac{B}{2}} \cdot \frac{1-tg^2\frac{C}{2}}{1+tg^2\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(2\sin^2\frac{C}{2}\right) \geq \frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}} \cdot \frac{1-tg^2\frac{B}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}} \cdot \frac{1-tg^2\frac{C}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2tg^2\frac{A}{2}\right)\left(2tg^2\frac{B}{2}\right)\left(2tg^2\frac{C}{2}\right) \geq \left(1-tg^2\frac{A}{2}\right)\cdot\left(1-tg^2\frac{B}{2}\right)\cdot\left(1-tg^2\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2tg\frac{A}{2}}{1-tg^2\frac{A}{2}} \cdot \frac{2tg\frac{B}{2}}{1-tg^2\frac{B}{2}} \cdot \frac{2tg\frac{C}{2}}{1-tg^2\frac{C}{2}} \geq \frac{1}{tg\frac{A}{2}} \cdot \frac{1}{tg\frac{B}{2}} \cdot \frac{1}{tg\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad tgA.tgB.tgC \geq \cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}$$

Δ ABC không vuông, nên $tgA.tgB.tgC = tgA + tgB + tgC$

$$\cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2} = \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

Biết: $tgA + tgB = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin C}{\cos A \cos B}$

$$= \frac{2\sin C}{\cos(A+B)+\cos(A-B)} = \frac{2\sin C}{\cos(A-B)-\cos C}$$

$$\geq \frac{2\sin C}{1-\cos C} = \frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}} = 2\cot g\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad tgA + tgB \geq 2\cot g\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Tương tự: $tgB + tgC \geq 2\cot g\frac{A}{2}$ (2)

$$tgC + tgA \geq 2\cot g\frac{B}{2} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế ta được:

$$tgA + tgB + tgC \geq \cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}$$

$\Rightarrow$ Điều phải chứng minh đúng.

Bài 492

Giải phương trình:

$$\frac{3(\sin x + tgx)}{tgx - \sin x} - 2\cos x = 2$$

Đại học Tài chính Kế toán (2001)

GIẢI

Giải phương trình: $\frac{3(\sin x + tgx)}{tgx - \sin x} - 2\cos x = 2$ ( )

Điều kiện: $\begin{cases} tgx - \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{3\sin x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)} - 2(1+\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+\cos x)\left(\frac{3}{1-\cos x}-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \cos x = -1 & \text{(loai)} \\ \dfrac{3}{1-\cos x} = 2 & \end{array}\right. \qquad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \quad 1-\cos x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi}\,(k \in Z)$$

Bài 493

Giải phương trình:

$$2\sin x\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$$

Đại học Kinh tế Quốc dân (2000)

GIẢI

Giải phương trình: $2\sin x\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$ (1)

Điều kiện: $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ (2)

Bình phương 2 vế (1) ta được:

$$4\sin^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1+8\sin 2x\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left[1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=1+8\sin 2x\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1+\sin 6x)=1+8\sin 2x\left(1-\sin^2 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1+3\sin 2x-4\sin^3 2x\right)=1+8\sin 2x-8\sin^3 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện (2):

$$\sin\left(3x_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3k\pi\right) = \begin{cases} 1 \text{ khi } k = 2n \\ -1 \text{khi } k = 2n+1 \end{cases}$$

$$\sin\left(3x_2 + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3k\pi\right) = \begin{cases} 1 \text{ khi } k = 2m \\ -1 \text{khi } k = 2m+1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + 2n\pi} \text{ và } \boxed{x = \frac{5\pi}{12} + (2m+1)\pi} \quad (n, m \in Z)$$

Bài 494

Giải phương trình:

$$\mathbf{\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x \cot gx + \cos^3 x tgx = \sqrt{2\sin 2x}}$$

Đại học Kiến trúc (2001)

GIẢI

Giải phương trình:

$$\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x \cot gx + \cos^3 x tgx = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^3 x + \cos^3 x + \frac{\sin^3 x \cos x}{\sin x} + \frac{\cos^3 x \sin x}{\cos x} = \sqrt{2\sin 2x} \qquad (\ )$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) + \sin x \cos x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin x \cos x) = \sqrt{2\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x + \cos x = \sqrt{4\sin x \cos x}$$

Với sinx + cosx > 0, bình phương hai vế ta được:

$$(\sin x + \cos x)^2 = 4\sin x \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 4\sin x \cos x$$

$$2\sin x \cos x = 1$$

$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Kết hợp với điều kiện sinx + cosx > 0 ta có nghiệm :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2l\pi} \quad (l \in Z)$$

Bài 495

Chứng minh điều kiện cần và đủ để Δ ABC đều là:

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \frac{2p}{9R}$$

Trong đó: a = BC; b = CA; c = AB; $p = \frac{a+b+c}{2}$ và R là bán kính đường trong ngoại tiếp Δ ABC

Đại học Kiến trúc Hà Nội (2000)

GIẢI

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \frac{2p}{9R} \qquad (1)$$

Thế a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC

và 2p = a + b + c vào (1) ta được:

$$\frac{2R(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C)}{2R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} = \frac{a+b+c}{9R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{4(\sin A + \sin B + \sin C)}{9} \qquad (2)$$

Biến đổi: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 4\sin A\sin B\sin C$$

Từ (2) $\Rightarrow$ $9\sin A\sin B\sin C = (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)(\sin A + \sin B + \sin C)$

$$\geq 3\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}.\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

$$= 9\sqrt[3]{\sin^3 A\sin^3 B\sin^3 C} = 9\sin A\sin B\sin C \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sin A = \sin B = \sin C$$

$\Leftrightarrow \quad a = b = c \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều

Bài 496

Giải phương trình: $\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x = 2$

Đại học Huế (2000, D)

GIẢI

$$\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x = 2 \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x$, $\quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ suy ra:

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -5 \quad \left(\text{loại vì } -\sqrt{3} < -\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$

Với t = 1 thì $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = 2k\pi \end{array}\right.} \quad (k \in Z)$$

Bài 497

Giải phương trình: $3tg^2x + 4tgx + 4\cot gx + 3\cot g^2x + 2 = 0$

Cao đẳng Hải quan (2000)

GIẢI

$$3tg^2x + 4tgx + 4\cot gx + 3\cot g^2x + 2 = 0 \qquad (1)$$

(1) $\Leftrightarrow \quad 3\left(tg^2x + \cot g^2x\right) + 4\left(tgx + \cot gx\right) - 4 = 0$

Đặt $t = tgx + \cot gx$, $\qquad |t| \ge 2$

Ta có phương trình: $3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = \dfrac{2}{3} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

• Với $t = -2$ ta có $tgx + cotgx = -2 \Leftrightarrow tgx + \dfrac{1}{tgx} = -2$

$$\Leftrightarrow \quad tg^2x + 2tgx + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tgx = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

Bài 498- 499

1. Giải phương trình: $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \dfrac{1}{\cos x}$

2. Tam giác ABC có:

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$$

Đại học Ngoại ngữ (Chưa phân ban)

GIẢI

1. Giải phương trình: $2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \dfrac{1}{\cos x}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 x - 1\right) - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(4\cos^2 x - 8\cos x + 5\right)\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 5\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x - 1)\left(4\cos^3 x - 4\cos x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x - 1 = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right.} \quad (k \in Z)$$

2. Chứng minh tam giác ABC vuông:

Ta có: $\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}$ (1)

Biết a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC nên:

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{2R\sin B}{\cos B} + \frac{2R\sin C}{\cos C} = \frac{2R\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C}$$

$$\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C} \qquad (2)$$

Biết $\sin(A+B) = \sin(\pi - A) = \sin A$, do đó từ (2) suy ra:

$$\cos B\cos C = \sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(B+C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B + C = 90^0 \Rightarrow A = 90^0$$

Vậy Δ ABC vuông tại đỉnh A.

Bài 500-501

1. Giải phương trình: $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

2. Tam giác ABC có: $\cot g\frac{B}{2} = \frac{a+c}{b}$. Chứng minh Δ ABC vuông.

Đại học Ngoại ngữ (Chưa phân ban)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4} = 1\right)$ (1)

Biết $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ nên từ (1) ta có:

$$\sin 2x + \sin x - \cos x = 1 \qquad (2)$$

Đặt $t = \sin x - \cos x$, $|t| \le \sqrt{2}$ thì $\sin 2x = 1 - t^2$

Thế vào (2) ta được:

$$1 - t^2 + t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Với t = 0 ta có: $\sin x - \cos x = 0$

$$\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in Z)$$

Với t = 1 ta có: $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right.} \quad (k \in Z)$$

2. Chứng minh Δ ABC vuông:

Ta có: $\cot g\frac{B}{2} = \frac{a + c}{b}$ (1)

Biết $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ nên từ (1) ta có:

$$\cot g\frac{B}{2} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R\sin B} = \frac{2\sin\frac{A + C}{2}\cos\frac{A - C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{A - C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{B}{2} = \cos\frac{A - C}{2}$$ (2) do $0 < A, B, C < \pi$ suy ra

$0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \frac{A - C}{2} \le \frac{\pi}{2}$ nên từ (2) ta có: $\frac{B}{2} = \pm\frac{A - C}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B = A - C \\ B = C - A \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

Vậy Δ ABC vuông tại A hoặc vuông tại C.

Bài 502-503

1. Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0$

2. Giải phương trình: $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$

Học viện Ngân hàng TP. Hồ Chí Minh (2000, A)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \quad 3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x - 4\sin^3 x + 3\sin x - \cos x = 0 \qquad (2)$$

Do cosx = 0 không phải là nghiệm của phương trình, ta chia 2 vế của (2) cho $\cos^3 x$ và đặt t = tgx, ta được:

$$4 - 4t^3 + 3(1+t) - (1+t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -t^2(t+1) + 3(t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t+1)(3-t^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.} \quad (k \in Z)$$

2. Giải phương trình: $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \quad \sin x(1 + \sin x) + \cos x(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x(1 + \sin x) + \cos x(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + \sin x)(\sin x + \cos x - \cos x \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x + \cos x = \sin x \cos x \end{array}\right.$$

- Với $\sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- Với $\sin x + \cos x = \sin x \cos x$

Đặt $\sin x + \cos x = t$, $\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có phương trình:

$$t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 + \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{array}\right. \qquad \left(\text{loại vì } 1 + \sqrt{2} > \sqrt{2}\right)$$

Do đó: $\sin 2x + \cos 2x = 1 - \sqrt{2}$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \cos\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad x - \frac{\pi}{4} = \pm\alpha$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi} \ (k \in Z)$$

Bài 504-505

1. Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x = \sin 2x + \cos 2x$

2. Cho Δ ABC, điểm M chạy trên BC. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ ABM, Δ Acm. Xác định vị trí của M sao cho $R_1 + R_2$ nhỏ nhất.

Đại học Ngoại thương TP. Hồ Chí Minh (2000, A)

GIẢI

1. Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \quad 1 - \cos 2x + \sin x + \cos 3x - \cos x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 2\sin 2x \sin x - \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin x(2\sin x + 1) - (2\sin x + 1)\sin 2x = 0$

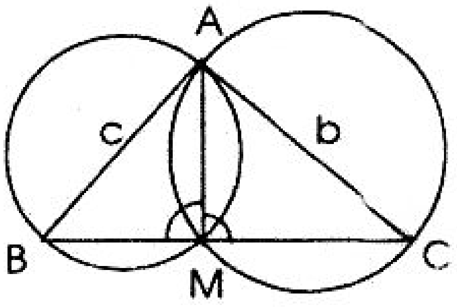
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = 0 \\ \sin x - \sin 2x = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \sin 2x = \sin x \end{array}\right.$$

Với $\sin x = -\frac{1}{2}$ có nghiệm: $\boxed{\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right.}$ $(k \in Z)$

Với sin2x = sinx có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} 2x = x + k2\pi \\ 2x = (\pi - x) + 2k\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right.} \quad (k \in Z)$$

2. Tìm M để $R_1 + R_2$ nhỏ nhất:



Trong Δ AMB và Δ AMC ta có:

$$\frac{c}{\sin AMB} = 2R_1; \quad \frac{C}{\sin AMC} = 2R_1$$

$$\Rightarrow \ 2(R_1 + R_2) = \frac{c}{\sin AMB} + \frac{b}{\sin AMC}$$

Biết $AMB = \pi - AMC$ nên $\sin \widehat{AMB} = \sin \widehat{AMC}$

Do đó: $R_1 + R_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b + c}{\sin AMB}\right)$

b và c không đổi nên $R_1 + R_2$ nhỏ nhất khi sinAMB lớn nhất $\Rightarrow$ $\sin AMB = 1 \Rightarrow AMB = 90^0 \Rightarrow \ AM \perp BC$

Do đó M là chân đường cao kẻ từ A đến cạnh BC.

Bài 506-507

1. Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x$

2. Cho Δ ABC, giả sử G là giao điểm của các đường trung tuyến. Đặt $G\hat{A}B = \alpha$, $GBC = \beta$, $GCA = \gamma$. Chứng minh:

$$\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

Trong đó $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, S là diện tích Δ ABC.

Đại học Ngoại thương Hà Nội (2000,A)

GIẢI

1. Giải phương trình:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x \qquad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \quad \sin^8 x - 2\sin^{10} x + \cos^8 x - 2\cos^{10} x - \frac{5}{4}\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin^8 x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^8 x(1 - 2\cos^2 x) - \frac{5}{4}\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin^8 x\cos 2x - \cos^8 x\cos 2x - \frac{5}{4}\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x\left(\sin^8 x - \cos^8 x - \frac{5}{4}\right) = 0$$

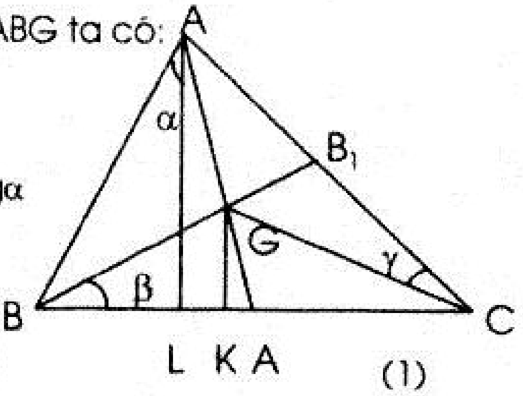
$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = 0 & (2) \\ \sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4} & (3) \end{array}\right.$$

* Vì $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in Z)$

* Vì $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4}$ vô nghiệm do $\sin^8 x - \cos^8 x \le \sin^8 x \le 1 \le \frac{5}{4}$

2. Chứng minh: $\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$

Theo định lí hàm số cosin, trong tam giác ABG ta có:



$$GB^2 = AB^2 + AG^2 - 2AB.AG\cos\alpha$$

$$= AB^2 + AG^2 - 4\frac{1}{2}AB.AG\sin\alpha.\cot g\alpha$$

$$GB^2 = AB^2 + AG^2 - 4.S_{\Delta ABG}\cot g\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 4S_{\Delta ABG}\cot g\alpha = AB^2 + AG^2 - GB^2 \qquad (1)$$

Ta có: $S_{\Delta GAB} = \frac{1}{2}BC.GK = \frac{1}{2}BC.\frac{1}{3}AL = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \qquad (2)$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}\cot g\alpha = AB^2 + AG^2 - GB^2 \qquad (3)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}\cot g\beta = BC^2 + BG^2 - GC^2 \qquad (4)$$

$$\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}\cot g\gamma = AC^2 + GC^2 - AG^2 \qquad (5)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một ta được:

$$\frac{4}{3}S_{\Delta ABC}(\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma) = AB^2 + BC^2 - CA^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{3}S_{\Delta ABC}(\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma) = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma = 3\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 508-509

> **1. Giải phương trình: $(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x =$**
>
> **2. Cho $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ và cotgA, cotgB, cotgC theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tính cotgA.cotgC**
>
> **Đại học Hàng hải (2000)**

GIẢI

1. Giải phương trình: $(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 1 - 4\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + (0 + 2\sin x)(1 - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x + 1)(3\cos 4x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2\sin x + 1 = 0 \\ 3\cos 4x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos 4x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \qquad (k \in Z) \\ x = k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

2. Tính cotgA.cotgC: cotgA, cotgB và cotgC lập thành một cấp số cộng theo thứ tự đó nên ta có:

$$\cot gA + \cot gC = 2\cot gB$$

$$\frac{\sin(A+C)}{\sin A \sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B} \qquad (1)$$

Do $A + C = \dfrac{\pi}{2} - B$ nên $\sin(A + B) = \cos B$

(1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{\cos B}{\sin A \sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sin B}{\sin A.\sin C} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(A+C)}{\sin A \sin C} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A \cos C - \sin A \sin C}{\sin A \sin C} = 2$$

$$\Rightarrow \cot gA.\cot gC = 3$$

Bài 510-511

1. Giải phương trình: $4\cos^3 x - \cos x - \sin x = 0$

2. Cho ΔABC thoả: $\sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{a-c}{2a}}$

Chứng minh Δ ABC vuông

Đại học Hồng Đức (2000, A)

GIẢI

1. Giải phương trình: $4\cos^3 x - \cos x - \sin x = 0$ (1)

Do $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia phương trình cho $\cos^3 x$ ($\neq 0$) ta được:

$$4 - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 - \left(1 - tg^2x\right) - tgx\left(1 + tg^2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - tg^2x - tgx - tg^3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^3x + tg^2x + tgx - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(tgx - 1\right)\left(tg^2x + 2tgx + 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} tgx - 1 = 0 \\ tg^2x + 2tgx + 3 = 0 \ \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Chứng minh Δ ABC vuông:

Ta có: $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}} \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{B}{2} = \frac{a-c}{2a}$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{B}{2} = 1 - \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{a} = 1 - 2\sin^2\frac{B}{2} = \cos B$$

Biết $a = 2R\sin A,\ c = 2R\sin C$ nên

$$\frac{c}{a} = \frac{2R\sin C}{2R\sin A} = \cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin C = \sin A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(A + B\right) = \sin A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A\cos B + \sin B\cos A = \sin A\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin B\cos A = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 90^0$$

Vậy Δ ABC vuông tại B.

Bài 512 - 513

1. Giải phương trình: $\sin 2x(\cot gx + tg2x) = 4\cos^2 x$

2. Cho Δ ABC có $0^0 < A \le B \le C < 90^0$. Chứng minh:

$$\frac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \ge 2$$

Đại học Mỏ - Địa chất (2010)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sin 2x(\cot gx + tg2x) = 4\cos^2 x$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \cos 2x \neq 0$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow \quad \sin 2x\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) = 4\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x . \frac{\cos x}{\sin x \cos 2x} = 4\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin x \cos^2 x}{\sin x \cos 2x} = 4\cos^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \text{ thoả mãn đk(2)}$$

Phương trình có nghiệm: $\boxed{\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Chứng minh: $\dfrac{2\cos 3C - 4\cos 2C + 1}{\cos C} \geq 2$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \quad 2(4\cos^3 C - 3\cos C) - 4(2\cos^2 C - 1) \geq 2\cos C$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\cos^3 C - 8\cos^2 C - 8\cos C + 5 \geq 0 \qquad (2)$$

Do $A \leq B \leq C$ nên $A + B \leq 2C$ suy ra: $60^0 \leq C < 90^0 \Rightarrow 0 < \cos C \leq \frac{1}{2}$

Đặt t = cosC thì $t \in (0; \frac{1}{2})$, thế vào (2) ta được:

$$8t^3 - 8t^2 - 8t + 5 \geq 0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2t - 1)(4t^2 - 2t - 5) \geq 0$$

Do $t = \cos C \leq \frac{1}{2}$ nên $2t - 1 \leq 0$

và $4t^2 - 2t - 5 = 4[(t^2 - 1) - 2t - 1] < 0$ đúng $\Rightarrow$ (3) đúng

Cách khác: có thể xét $y(t) = 8t^3 - 8t^2 - 8t + 5 \geq 0$ bằng cách tính $y'(t)$ và xét $y_{min} = 0$.

Bài 514-515

1. Giải phương trình: $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2. Tính các góc của Δ ABC, biết chúng thoả mãn:

$$\sin(B - A)\sin C + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

Viện Đại học Mỏ Hà Nội (2000,A)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Biết: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

Do đó phương trình đã cho là:

$$\frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x) + \cos^2 3x - \sin^2 3x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\cos 2x + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^3 2x = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi} \quad (k \in Z)$$

2. Tính các góc của tam giác ABC biết:

$$\sin(B - A)\sin C + \sin A + \cos B = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(B-A)\sin(B+A)+\sin A+\cos B=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 2B)+\sin A+\cos B=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[1-2\sin^2 A-\left(2\cos^2 B-1\right)\right]+\sin A+\cos B=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 A+\cos^2 B-\sin A-\cos B+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\sin A-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\sin A=\dfrac{1}{2}\\ \cos B=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \; A=30^0;\; B=60^0;\; C=90^0$$

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại C.

Bài 516

1. **Giải phương trình: $\cos^5 x+\sin^5 x+\cos 2x+\sin 2x=1+\sqrt{2}$**

Đại học Nông nghiệp (2000, B)

GIẢI

Ta có: $\cos^5 x+\sin^5 x+\cos 2x+\sin 2x=1+\sqrt{2}$ (1)

Biết: $\cos^5 x+\sin^5 x\le\cos^2 x+\sin^2 x=1$

và $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\cos\left(s-\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

Phương trình (1) có vế trái $\le 1+\sqrt{2}$ nên phương trình chỉ có nghiệm khi:

$$\begin{cases}\cos^5 x+\sin^5 x=\sin^2 x+\cos^2 x=1 & (2)\\ \sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2} & (3)\end{cases}$$

Xét (2) $\Leftrightarrow \cos^5 x+\sin^5 x-\sin^2 x-\cos^2 x=0$

$$\cos^2 x\underbrace{\left(1-\cos^3 x\right)}_{\geq 0}+\sin^2 x\underbrace{\left(1-\sin^3 x\right)}_{\geq 0}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 x\left(1-\cos^3 x\right)=0\\ \sin^2 x\left(1-\sin^3 x\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=0\end{cases} \vee \begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=2k\pi\end{array}} \quad (k\in Z)$$

Hai họ nghiệm này không thoả mãn điều kiện (3). Vậy (2) và (3) vô nghiệm ⇔ phương trình (1) vô nghiệm.

Bài 517 - 518

> **1. Cho hàm số: $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{2}{5}\sin 5x$**
>
> **Tính đạo hàm f'(x) và giải phương trình f'(x) = 0**
>
> **2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:**
>
> $$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=$$
> $$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}$$
>
> **Học viện Quan hệ Quốc tế (2000, A và D)**

GIẢI

1. Giải phương trình f'(x) = 0:

Ta có: $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{2}{5}\sin 5x$

$$f'(x)=\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x\cos x+2\cos(4x+x)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x\cos x+\cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(\cos 2x+2\cos^2 2x-1-4.\frac{1-\cos 2x}{2}\cos 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(4\cos^2 2x-\cos x-1\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 4\cos^2 2x-\cos 2x-1=0\end{array}\right.$$

- Với cosx = 0 ⇔ $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\pi}$ $(k\in Z)$

- Với $4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$ ta có $\cos 2x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$

Đặt $\cos 2x = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{8} = \cos\alpha \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\dfrac{\alpha}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

$\cos 2x = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{8} = \cos\beta \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\dfrac{\beta}{2} + k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Chứng minh trong mọi tam giác ta có:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2}$$

Trong mọi tam giác ta có: $\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$ nên $\mathrm{tg}\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) = \mathrm{cotg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}}{1 - \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2}\mathrm{tg}\frac{A}{2} = 1 \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$= \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2} = 1$$

$\Leftrightarrow \quad \cos^2\dfrac{C}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = 1$ (luôn đúng)

ĐỀ THI NĂM 2001

Bài 519-520

1. Giải phương trình: $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x\sin x$

2. Tính giá trị biểu thức: $P = \sin^2 50^0 + \sin^2 70^0 - \cos\ 50^0.\cos 70^0$

Đ.H. An ninh (A)

GIẢI

1. Giải phương trình:

$$2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x\sin x \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2(\cos x - \cos 28x\sin x) = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 10x$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, vế trái ta có:

$$2(1.\cos x - \cos 28x\sin x)^2 \le 2\left(1 + \cos^2 28x\right) \le 2\sqrt{2} \qquad (2)$$

Biết $|\sin 10x| \le 1$ nên vế phải $\ge 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (3)

Từ (2) và 3 $\Leftrightarrow$ VT = VP = $2\sqrt{2}$

Dấu "=" ở (2) khi $\dfrac{\cos x}{1} = \dfrac{-\sin x}{\cos 28x}$; $\cos^2 28x = 1$

Dấu "=" ở (3) xảy ra khi $\sin 10x = 1$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \cos x.\cos 28x = -\sin x \\ \sin 10x = 1 \\ \cos^2 28x = 1 \end{cases}$

Giải hệ này ta được: $\boxed{x = \dfrac{k\pi}{28} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

2. Tìm giá trị biểu thức $P = \sin^2 50^0 + \sin^2 70^0 - \cos\ 50^0.\cos 70^0$

Biết $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$; $\sin^2 50^0 = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos 100^0\right)$

$$\sin^2 70^0 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 140^0\right)$$

Do đó: $P = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos 100^0\right) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos 140^0\right) - \dfrac{1}{2}\left(\cos 120^0 + \cos\ 20^0\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{2}\left(\cos 140^0 + \cos 100^0\right) - \dfrac{1}{2}\left(\cos 120^0 + \cos\ 20^0\right)$

$$= 1 - \cos 120^0 \cos 20^0 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^0\right)$$

$$\boxed{= 1 + \frac{1}{2}\cos 20^0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20^0 = \frac{5}{4}}$$

Bài 521

Giải phương trình: $3\sin^4 x + 5\cos^4 x - 3 = 0$

Đ.H. An ninh Nhân dân (A)

GIẢI

Giải phương trình: $3\sin^4 x + 5\cos^4 x - 3 = 0$ (1)

Từ (1) $\Leftrightarrow -3\left(1 - \sin^4 x\right) + 5\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow -3\left(1 + \sin^2 x\right)\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(1 - 4\sin^2 x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \cos^2 x = 0 & \Rightarrow & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 4\sin^2 x = 1 & \Rightarrow & \cos 2x\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right.$$

Bài 522

Cho hàm số: $f(x) = (2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)$

và $g(x) = \dfrac{2\cos x + \sin x}{2\sin x + \cos x} + \dfrac{2\sin x - \cos x}{2\cos x - \sin x}$

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của f(x)

2. Xác định mọi giá trị của tham số m để phương trình sau đây có đúng một nghiệm: $(x - 3)g(x) = 3[f(x) - m]$

Đ.H. Cần Thơ (A)

GIẢI

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = (2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)$$

Ta có: $f(x) = 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

$$= \frac{3}{2}\sin 2x + 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow \quad 2f(x) = 3\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$= 5\left(\frac{3}{5}\sin 2x + \frac{4}{5}\right)\cos 2x$$

$$= 5(\cos\alpha\sin 2x + \sin\alpha\cos 2x)$$

$$= 5\cos(2x+\alpha)$$

Do $-5 < 5\cos(2x+\alpha) \le 5$

Nên $-5 < 2f(x) \le 5$

$$\boxed{-\frac{5}{2} \le f(x) \le \frac{5}{2}}$$

Vậy giá trị lớn nhất của f(x) là $\frac{5}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của f(x) là $-\frac{5}{2}$

2. Xác định m để phương trình sau đây có nghiệm:

$$(x-3)g(x) = 3[f(x) - m]$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-3)\left(\frac{2\cos x + \sin x}{2\sin x + \cos x} + \frac{2\sin x - \cos x}{2\cos x - \sin x}\right)$$

$$= 3[(2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x) - m] \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-3)\frac{3(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)} = (m-3)\frac{3}{f(x)}$$

Đặt $t = f(x)$, theo câu 1, thì $-\frac{5}{2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{5}{2}$

(5) trở thành $(m-3)\frac{3}{t} = 3(t-m) \qquad (t \ne 0)$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - mt + 3 - m = 0 \qquad (t \ne 0) \qquad (6)$$

Nếu m = 3 thì (5) $\Leftrightarrow t^2 - 3t = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ loại} \\ t = 3 \end{array}\right. \notin \left[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right]$

Vậy m = 3 thì phương trình trên vô nghiệm

Nếu m $\neq$ 3 từ (6) ta có:

$$t^2 + 3 = m(t+1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2+3}{t+1} = m$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi m là một giá trị của hàm số

Xét $\quad y = f(t) = \dfrac{t^2+3}{t+1}$ với $\quad -\dfrac{5}{2} \le t \le \dfrac{5}{2}$

$$y' = f'(x) = \frac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$$

Bảng biến thiên

t		-3		$-\frac{5}{2}$		-1		1		$\frac{5}{2}$
f'(t)	+	0	-		-	‖	-	0	+	
f(t)				$-\frac{37}{6}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	

Từ bảng biến thiên trên ta có f(t) = m có nghiệm $\left[-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right]$ nên các

giá trị của m là: $\boxed{\left[\begin{array}{l} m \le -\frac{37}{6} \\ m \ge 2; m \neq 3 \end{array}\right.}$

Bài 523

Giải phương trình: $\quad \sin 2x + 2tgx = 3$

Đ.H. Bách khoa Hà Nội (A, D)

GIẢI

Giải phương trình: $\sin 2x + 2tgx = 3$

$$\Leftrightarrow \quad 2tgx + 2tgx + 2tg^3x = 3 + tg^2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 2tg^3x - 3tg^2x + 4tgx - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (tgx - 1)(2tg^2x - tgx + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Cách khác: $\sin 2x + 2\mathrm{tg}x = 1 + 2$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \sin 2x + 2(1 - \mathrm{tg}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x - \sin x)^2 + 2\frac{\cos x - \sin x}{\cos x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x - \sin x)\left(\cos x - \sin x + \frac{2}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Phương trình $\cos x - \sin x + \frac{2}{\cos x} = 0 \Rightarrow$ vô nghiệm.

Bài 524

Giải phương trình:

$$\mathbf{4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x + 3\sqrt{5}\cos 4x = 3}$$

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

GIẢI

Giải phương trình: $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x + 3\sqrt{5}\cos 4x = 3$ (1)

Biết $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ và $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Suy ra $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$ và $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$ (2)

Thế các giá trị $4\sin^3 x$ và $4\cos^3 x$ ở (2) và (1), ta được:

$$(3\sin x - \sin 3x)\cos 3x + (3\cos x + \cos 3x)\sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(\sin x\cos 3x + \cos x\sin 3x) + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 4x\sin\frac{\pi}{6} + \cos 4x\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} & k \in Z \\ x = \dfrac{-\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} & k \in Z \end{array}\right.}$$

Bài 525 - 526

1.. Giải phương trình lượng giác:

$$\mathbf{tg^2x\,cotg^22x\,cotg3x = tg^2x - cotg^22x + cotg3x}$$

2.. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số:

$$\mathbf{y = 2(1 + \sin 2x\cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)}$$

Đại học Dược Hà Nội - Đại học Luật Hà Nội

GIẢI

1.. Giải phương trình:

$$tg^2x\,cotg^22x\,cotg3x = tg^2x - cotg^22x + cotg3x \qquad (1)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \qquad (k \in Z)$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow cotg3x\left(tg^2x\,.\,cotg^22x - 1\right) = tg^2x - cotg^22x$$

$$cotg3x(tgx.cotg2x + 1)(tgx.cotg2x - 1) = (tgx + cotg2x)(tgx - cotg2x)$$

$$\cot g3x\left(\frac{\sin x.\cos 2x}{\cos x \sin 2x}+1\right)\left(\frac{\sin x.\text{có}2x}{\cos x.\sin 2x}-1\right)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cot g3x\frac{\sin 3x}{\cos x.\sin 2x}\cdot\frac{\sin(-x)}{\cos x.\sin 2x}=\frac{\cos(x-2x)}{\cos x \sin 2x}\cdot\frac{-\cos(x+2x)}{\cos x.\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x.\sin x=\cos x.\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x(\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(4\cos^3 x-\cos 3x)(\cos x-\sin x)=0$$

Do $\cos x \neq 0$ nên $(4\cos^3 x-\cos 3x)(\cos x-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^2 x-3=0\\ \cos x-\sin x=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=\dfrac{1}{2}\\ tgx=1\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$$

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2(1+\sin 2x\cos 4x)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)$$

$$\Leftrightarrow y=2+2\sin 2x.\cos 4x-\sin 6x.\sin 2x$$

$$=2+2\sin x(2\cos 4x-\sin 6x)$$

$$=2+\sin 2x\left[2(1-2\sin^2 2x)-(3\sin 2x-4\sin^3 2x)\right]$$

$$=2+\sin 2x\left[2-4\sin^2 2x-3\sin 2x+4\sin^3 2x\right]$$

$$=2+2\sin 2x-4\sin^3 2x-3\sin^2 2x+4\sin^4 2x$$

Đặt $t=\sin 2x$ $(t\in[-1;1])$ ta có:

$$y=4t^4-4t^3-3t^2+2t+2$$

Xét $f(x)=4t^4-4t^3-3t^2+2t+2$

Có $f'(x)=16t^3-12t^2-6t+2=(t-1)(16t^2+4t-2)$

$$\Leftrightarrow t=1;\ t=-\frac{1}{2}\ \text{và}\ t=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} t = 1 & \Rightarrow & y = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} & \Rightarrow & y = 1 \\ t = \dfrac{1}{4} & \Rightarrow & y = \dfrac{146}{64} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			1
y'		-	0		+		-	0
y=f(x)	5	↘	1 y(CT)	↗	$\frac{145}{64}$ y(CĐ)	↘		1 ↗

Bảng trên cho ta $\boxed{\max\limits_{[-1;1]} y = \max f(t) = 5}$ và $\boxed{\min\limits_{[-1;1]} y = \min f(t) = 15}$

Bài 527

Giải phương trình: $\mathbf{Cos^3x - sin^3x = cos^2x - sin^2x}$

Đại học Đà Lạt (A, B)

GIẢI

Giải phương trình: $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x) - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x - \cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \cos x - \sin x = 0 & (1) \\ 1 + \sin x \cos x - \cos x - \sin x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải phương trình (1) ta được $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in Z)$

Đặt $t = \cos x + \sin x$ với $|t| \le \sqrt{2}$ thì $\cos x \sin x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, phương trình 2) tương đương: $1 + \dfrac{t^2 - 1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{lll} t = 1 & \Rightarrow & x = 2k\pi \\ t = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)}$$

Bài 528

Giải phương trình lượng giác: $tg^2x = \dfrac{1 + \cos x}{\cos x}$

Đại học Đà Nẵng (A)

GIẢI

Giải phương trình: $tg^2x = \dfrac{1 + \cos x}{\cos x}$ (1)

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 + \cos x}{\cos x}\left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 1 + \cos x = 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{\cos x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)}$$

Bài 529

Giải phương trình lượng giác:

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

Đại học Giao thông

GIẢI

Giải phương trình:

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8} \qquad (1)$$

Biết: $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ nên (1)

$$\Rightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(1-\cos 2x)^2 + (1+\sin 2x)^2 + (1-\sin 2x)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\left(4 - 2\cos 2x + \sin^2 2x\right) = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(4 - 2\cos 2x + \sin^2 2x\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x + 4\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2} \text{ (loại)} \\ \cos 2x = \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$$

Đặt $\cos\alpha = \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}$ thì $\cos 2\alpha = \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi \qquad (k \in Z)}$$

Bài 530

Giải phương trình:

$$3\cot g^2x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2+\sqrt{3}\right)\cos x$$

Học viện Kỹ thuật Quân sự

GIẢI

Giải phương trình:

$$3\cot g^2x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(\cot g^2x - \sqrt{2}\cos x\right) + 2\left(\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x\sin^2 x\right) + 2\left(\sqrt{2}\sin^4 x - \cos x\sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos x\left(3\cos x - 2\sin^2 x\right) - \sqrt{2}\sin^2 x\left(3\cos x - 2\sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x\right)\left(3\cos x - 2\sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \cos x - \sqrt{2}\sin^2 x = 0 & (1) \\ 3\cos x - 2\sin^2 x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Rightarrow \cos x - \sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\sqrt{2} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow \quad x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \;(k \in Z) \\ \text{loại} \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \;(k = Z) \\ \cos x = 2 \;(\text{loại}) \end{array}\right.$$

Cách hai: Chia hai vế cho $\sin^2 x \neq 0$, đặt

$$t = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow t^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$$

Từ (1) $\Leftrightarrow 3t^2 - \left(2+3\sqrt{2}\right)t + 2\sqrt{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{2};\; t = \dfrac{2}{3}$

Với $t = \sqrt{2}$, có phương trình: $\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{lll} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \Leftrightarrow & x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k \in Z) \\ \cos x = 2 & (\text{loại}) & \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{2}{3}$, có phương trình $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{lll} \cos x = \dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow & x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \in Z) \\ \cos x = 2 & (\text{loại}) & \end{array}\right.$$

Bài 531

Giải và biện luận theo m phương trình:

$$2m(\cos x + \sin x) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2}$$

Đại học Kiến trúc Hà Nội

GIẢI

Giải và biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$2m(\cos x + \sin x) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad (2m-1)\cos x + (2m+1)\sin x = 2m^3 + \frac{3}{2}$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (2m-1)^2 + (2m+1)^2 \geq \left(2m^2 + \dfrac{3}{2}\right)^2$

$$\left(2m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \qquad m = \pm\frac{1}{2}$$

Với $m = \dfrac{1}{2}$ suy ra $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in Z)$

Với $m = -\dfrac{1}{2}$ suy ra $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \qquad (k \in Z)$

Vậy với $m \neq \pm\dfrac{1}{2}$ phương trình vô nghiệm

Với $m = \frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in Z)}$

Với $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm $\boxed{x = \pi + 2k\pi \qquad (k \in Z)}$

Bài 532

Cho phương trình:

$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = m(\sin x + \cos x)$ với m là tham số

1. Giải phương trình (1)khi $m = 2$

2. Tìm m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Đại học Luật TP. Hồ Chí Minh (A B)

GIẢI

1. Giải phương trình:

$$2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \sin x\cos^2 x = m(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) - m(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x)[2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ 2(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x - m = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được: $tgx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Đặt $t = \cos x - \sin x$ với $|t| \le \sqrt{2}$ phương trình (2) trở thành:

$$-\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Khi $m = 2$: (3) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Với $\cos x - \sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$

2. Với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì loại nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $t = \cos x - \sin x$ thì $-1 \le t \le 1$

Xét hàm $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{1}{2} = m$ có nghiệm $t \in [-1;1]$

Ta có: $f'(t) = -t + 2 > 0 \ \forall t \in [-1;1]$ nên $f(-1) \le m \le f(1)$

$\Leftrightarrow \quad -2 \le m \le 2$

Bài 533

Giải phương trình: $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

Học viện Khoa học Quân sự

GIẢI

Giải phương trình: $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{2}\cos 7x + \sin\frac{\pi}{2}\sin 7x = \cos\frac{\pi}{6}\cos 5x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x - \frac{\pi}{3} = \pm\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 12x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \ (k \in Z) \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6} \end{array}\right. \ (k \in Z)}$$

Bài 534-535

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x - 7\cos y = 0 \\ 5\sin y - \cos x - 6 = 0 \end{cases}$

2. Cho $\cos 2x + \cos 2y = 1 \qquad (x, y \in R)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A = tg^2x + tg^2y$

Đại học Dân lập Văn Lang (A, B, C)

GIẢI

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x - 7\cos y = 0 & (1) \\ 5\sin y - \cos x - 6 = 0 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow 5(1-\sin y\ ) + 1 + \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in Z) \qquad (3)$$

Thế các giá trị của x và y ở (3) vào (1) ta thấy đúng. Do đó (3) chính là nghiệm của hệ.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = tg^2x + tg^2y$ biết $\cos 2x + \cos 2y = 1$

Ta có $\quad A = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y}$

$$= \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} + \frac{1-\cos 2y}{1+\cos 2y} = -2 + \frac{6}{2+\cos 2x.\cos 2y}$$

$$\geq -2 + \frac{6}{2+\left(\dfrac{\cos 2x + \cos 2y}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Khi $\cos 2x = \cos 2y = \dfrac{1}{2}$ thì $A = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \min A = \dfrac{2}{3}$ khi đó:

$$\cos^2 x = \cos^2 y = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi & (k \in Z) \\ y = \pm\dfrac{\pi}{6} + l\pi & (l \in Z) \end{array}\right.$$

Bài 536

Cho phương trình lượng giác: $\sin^4 x + \cos^4 x = m\sin 2x - \dfrac{1}{2}$ (1

1. Giải phương trình (1) khi m = 1

2. Chứng minh rằng với mọi tham số thực m thoả mãn điều kện $|m| \geq 1$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm.

Đại học Huế (A,B)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sin^4 x + \cos^4 x = m\sin 2x - \frac{1}{2}$ (1) khi m = 1

Vế trái: $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - 2\cdot\frac{1}{4}\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow\ = 1 - 2\cdot\frac{1}{4}\sin^2 x = m\sin^2 2x - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^2 2x + 2m\sin 2x - 3 = 0 \qquad (2)$$

Khi m = 1 trở thành: $\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = 3 \ (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad (k \in Z)}$$

2. Chứng minh với $\forall m$ thoả mãn $|m| \geq 1$ phương trình luôn có nghiệm.

Đặt t = sin2x với $-1 \leq t \leq 1$ (2) trở thành:

$$f(t) = t^2 + 2mt - 3 = 0 \qquad (3)$$

Xét $f(1).f(-1) = (2m-2)(-2m-2) = -4\left(m^2 - 1\right)$

Với $|m| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 1 \geq 0$

Khi đó $f(1).f(-1) \leq 0$

(3) có nghiệm thuộc $[-1;1]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Vậy với $|m| \geq 1$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Bài 537

Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

Đại học Kiến trúc TP. Hồ Chí Minh

GIẢI

Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

Ta có: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 3x + \sin x + \sin 2x$

$$= \sin 2x(2\cos x + 1)$$

• Với sin2x = 0 $\Rightarrow \boxed{2x = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}}$

• Với 2cosx + 1 = 0 $\boxed{\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}$

Bài 538

Cho phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x - 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = m\cos 2x$

a. Giải phương trình với $m = \frac{7}{5}$

b. Xác định m để phương trình có nghiệm $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Viện Đại học Mở Hà Nội

GIẢI

Giải phương trình: $\sin^8 x + \cos^8 x - 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) = m\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^8 x(1 - 2\sin^2 x) - \cos^8 x(2\cos^2 x - 1) - m\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin^8 x\cos 2x - \cos^8 x\cos 2x - m\cos 2x = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2x(\sin^8 x - \cos^8 x - m) = 0$$

Khi $m = \frac{7}{3}$ ta có: $\begin{cases}\cos 2x = 0 \\ \sin^8 x - \cos^8 x\end{cases} = m = \frac{7}{3}$ (loại)

• Với cos2x = 0 $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})}$

b. Xác định m để phương trình có nghiệm: $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Do $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ nên $\cos 2x \neq 1$, từ (1) suy ra: $\sin^8 x - \cos^8 x = m$

$$(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^4 x - \cos^4 x) = m$$

$$(\sin^4 + \cos^4 x)[(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)] = m$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos 2x\left[1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right]=m$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos 2x\left[1-\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 2x\right)\right]=m$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos 2x\left(1-\cos^2 2x\right)=2m$$

Đặt $t=\cos 2x$ thì $t \neq 0$ và $-1 \leq t \leq 1$, ta có: $-1\left(1+t^2\right)=2m$

Xét hàm số $f(t)=-t\left(1+t^2\right)$ có đạo hàm $f'(t)=-1-3t^2<0$

Do đó: $\boxed{\begin{cases}-2 \leq 2m \leq 2 \\ 2m \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 \leq m \leq 1 \\ m \neq 0\end{cases}}$

Bài 539 - 540

1. Giải phương trình sau:

$$48-\frac{1}{\cos^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}\left(1+\cot g2x \cot g4x\right)=0$$

2. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác mà cả ba góc trong của nó đều là nghiệm của phương trình:

$$\left(4\cos x-1\right)\left[7\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x-6\right]=0$$

Đại học Mỏ - Địa chất

GIẢI

Giải phương trình: $48-\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\sin^2 x}\left(1+\cot g2x\cot g4x\right)=0 \qquad (1)$

Điều kiện $\begin{cases}\sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad \sin 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \dfrac{k\pi}{2}$

Biết $1+\cot g2x.\cot gx=1+\dfrac{\cos 2x.\cos x}{\sin 2x \sin x}$

$$=\frac{\sin 2x \sin x+\cos 2x.\cos x}{2\sin^2 x.\cos x}=\frac{1}{2\sin^2 x} \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được: $48-\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{1}{\sin^4 x}=0$

$$\Leftrightarrow \quad 48\sin^4 x\cos^4 x - \sin^4 x - \cos^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sin^4 2x - \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\sin^4 2x + \sin^2 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin^2 2x - 1)(2\sin^2 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos 4x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \qquad (k \in Z)$$

2. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác mà cả ba góc trong của nó đều là nghiệm của phương trình:

$$(4\cos x - 1)\left[7\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x - 6\right] = 0 \qquad 1)$$

$$(1) \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{4} & (2) \\ 7\sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x - 6 = 0 & (3) \end{cases}$$

Do $\cos x \neq 0$ nên chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$$7tg^2 x - tgx - 6(1 + tg^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tg^2 x - tgx - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} tgx = -2 \\ tgx = 3 \end{array}\right.$$

x là góc của tam giác nên $0 < x < \pi$, vì $\cos x = \frac{1}{4} > 0$ nên suy ra $0 < x < \frac{\pi}{2}$ và $tgx > 0$

Ta có: $tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - 1 = 15 \Rightarrow tgx = \sqrt{15}$

Do đó cả ba góc của tam giác là nghiệm của phương trình thì các nghiệm đó là: $\begin{cases} \text{tg}x = -2 = \text{tg}A \\ \text{tg}x = 3 = \text{tg}B \\ \text{tg}x = \sqrt{15} = \text{tg}C \end{cases}$

Trong ΔABC ta có: $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$ (4)

Nếu vế phải của (4) là dương, vế trái (4) có giá trị âm → không tồn tại tam giác mà cả ba góc là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 541

Các góc của tam giác thoả mãn điều kiện:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Chứng minh rằng Δ ABC là một tam giác vuông

Đại học Ngoại thương Hà Nội (D)

GIẢI

Chứng minh Δ ABC là tam giác vuông nếu có các góc thoả mãn:

$$\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) - \sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + \sin^2\frac{A}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) - \cos^2\frac{A}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) + \cos\frac{B-C}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) = 0$$

Với $\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2} = 0 \Rightarrow \text{tg}\frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^0$

Với $\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A}{2} \Rightarrow\ B = 90^0$ hoặc $C = 90^0$ (đpcm)

Bài 542

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta luôn có:

$$\mathbf{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} = \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C}}$$

Đại học Ngoại thương TP. Hồ Chí Minh (D)

GIẢI

Chứng minh trong mọi tam giác ta có:

$$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} = \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} \quad (1)$$

Tính vế trái: $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \quad (2)$$

và mẫu số: $\sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2} + \sin\frac{C}{2}\right) = 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \quad (3)$$

Từ (1) ta có:

$$\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 + \cos A + \cos B + \cos C \quad (4)$$

Thế (2) và (3) vào (4) ta được:

$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + 4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)+2\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{A-C}{2}\right)$$

$$+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= 2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+2\sin^2\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

$$+2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 1-\cos A+\cos B+\cos C+1-\cos B+\cos A+\cos C$$

$$+1-\cos C+\cos A+\cos B$$

$$= 3-\cos A+\cos B+\cos C$$

Như vậy VT của (4) bằng $3-\cos A+\cos B+\cos C \Rightarrow$ (1) luôn đúng.

Bài 543

Trong tam giác có tgA.tgB = 3.tgB.tgC = 6. Chứng minh rằng ABC có một góc bằng 45^0.

Đại học Nông nghiệp Hà Nội (A)

GIẢI

Chứng minh rằng tam giác ABC có một góc bằng 45^0

Biết $A+B=\pi-C$ nên $tg(A+B)=tg(\pi-C) \Rightarrow tg(A+B)=tg(-C)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{tgA+tgB}{1-tgA.tgB}=-tgC \Leftrightarrow tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC$$

$$\Leftrightarrow \quad (tgA+tgB+tgC)tgB=tgA.tgB.tgC$$

Thế tgA.tgB = 3 và tgB.tgC = 3 vào ta được:

$$tgAtgB+tg^2B+tgBtgC=3.6$$

$$3+tg^2B+6=18$$

$$tg^2B=9 \Leftrightarrow tgB=\pm 3$$

Với tgB = -3 thì $tgA=-1 \Rightarrow A=45^0 \Rightarrow$ A, B là hai góc tù (loại)

Như vậy tam giác ABC có một góc bằng 45^0

Bài 544 - 545

1. Giải phương trình: $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$

Đại học Nông lâm TP. Hồ Chí Minh

GIẢI

1. Giải phương trình: $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \quad 1+\cos x+2\cos^2 x-1+4\cos^3 x-3\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x+2\cos^2 x-2\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos x\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)=0$$

Với $\cos x=0 \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad (k\in Z)$

Với $2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2k\pi \\ \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \quad (k\in Z)$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$

Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên $\text{tg}A,\ \text{tg}B,\ \text{tg}C>0$

Với ba số dương tgA, tgB, tgC theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$P=\text{tg}A+\text{tg}B+\text{tg}C\geq 3\sqrt[3]{\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C}=3\sqrt[3]{P}$$

$$\Leftrightarrow \quad P^2\geq 27 \Leftrightarrow P\geq 3\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi tgA=tgB=tgC ⇔ A=B=C ⇔ ΔABC là tam giác đều.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $3\sqrt{3}$, xảy ra khi Δ ABC là tam giác đều

Bài 546-547

1.Giảiphươngtrình lượng giác:

$$2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos 2x-4$$

2. Chứng minh rằng:

$$\cos 12^0+\cos 18^0-4\cos 15^0\cos 21^0\cos 24^0=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Đại học Quốc gia Hà Nội - Học viện Ngân hàng (A)

GIẢI

Giải phương trình lượng giác: $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos 2x - 4$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin x\cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) - 7\sin x - 2\cos x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ 2\cos x + \sin x - 3 = 0 \end{array}\right.$$

• Với 2siinx - 1 = 0 $\Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$

• Với $2\cos x + \sin x - 3 = 0$ vô nghiệm vì $2^2 + 1^2 < 3^2$

2. Chứng minh:

$$\cos 12^0 + \cos 18^0 - \cos 15^0 \cos 21^0 \cos 24^0 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \qquad (1)$$

Biết $\quad \cos 12^0 + \cos 18^0 = 2\cos 15^0 \cos 3^0$

Và $\quad \cos 21^0 \cos 24^0 = \frac{1}{2}\left(\cos 45^0 + \cos 3^0\right)$

Vế trái (1) $\Leftrightarrow \quad 2\cos 15^0 \cos 3^0 - 2\cos 15^0\left(\cos 45^0 + \cos 3^0\right)$

$$= -2\cos 15^0 \cos 45^0 = -\left(\cos 60^0 + \cos 30^0\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{(đpcm)}$$

Bài 548

1. Giải phương trình lượng giác: $\sin 3x = \cos x \cos 2x\left(tg^2 x + tg2x\right)$

Đại học Quốc gia Hà Nội - Học viện Ngân hàng (D)

GIẢI

Giải phương trình: $\sin 3x = \cos x \cos 2x\left(tg^2 x + tg2x\right) \qquad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 3x = \cos 2x.\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x.\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(2x + x) = \cos 2x.\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x.\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x.\cos 2x = \cos 2x\frac{\sin^2 x}{\cos x} \text{ (vì } \cos 2x \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \text{tg}x = 1\end{array}\right.$$

- Với sinx = 0 ta có nghiệm $x = k\pi$

- Với tg = 1 ta có: $\cos 2x = \dfrac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} = 0$ (loại vì điều kiện

Bài 549-550

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$$

2. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thoả mãn hệ thức

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} = \frac{1}{2\cos A.\cos B.\cos C}$$

Đại học Sư phạm Hà Nội (A)

GIẢI

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x} \qquad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow y = \dfrac{3(1 - \sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2(1 - \sin^2 x)}$ đặt $t = \sin^2 x$ với $0 \leq t \leq 1$

Ta được: $y = \dfrac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 2} = 1 + \dfrac{1}{3t^2 - 2t + 2}$

Xét $f(t) = 3t^2 - 2t + 2$, $0 \le t \le 1$ có $f'(t) = 6t - 2 = 0; t = \dfrac{1}{3}$

Khi f(t) lớn nhất thì $\dfrac{1}{f(t)}$ nhỏ nhất

Khi f(t) nhỏ nhất thì $\dfrac{1}{f(t)}$ lớn nhất

Do đó $\min\limits_{R} y = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$ $khi \sin^2 x = 1$

Và $\max\limits_{R} y = 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$ $khi \sin^2 x = \dfrac{1}{3}$

t	0		$\frac{1}{3}$		1
f'(t)		−	0	+	
f(t)	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{8}{5}$	↗	$\frac{4}{3}$

Cách 2: Khi cosx=0 ⇒ $y_{min} = \dfrac{4}{3}$

Khi $\cos x \neq 0$ chia (1) cho $\cos^4 x$ được $y = \dfrac{4tg^4x + 4tg^2x + 3}{3tg^4x + 2tg^2x + 2}$

Đặt $tg^2x = 0$ $(0 < t)$ ta được $y = \dfrac{4t^2 + 4t + 3}{3t^2 + 2t + 2} \rightarrow y' = \dfrac{-4t^2 - 2t + 2}{(3t^2 + 2t + 2)^2}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$\frac{3}{2}$	↗	$\frac{8}{5}$	↘	$\frac{4}{3}$

Ta cũng được kết quả tương tự $\min_{R} y = \frac{4}{3}$ và $\max_{R} y = \frac{8}{5}$

2. Chứng minh Δ ABC là tam giác đều

Theo giả thiết suy ra Δ ABC là góc nhọn

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} \geq \frac{2}{\sin 2A.\sin 2B} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} \geq \frac{2}{\sin 2B.\sin 2C} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sin^2 2C} + \frac{1}{\sin^2 2A} \geq \frac{2}{\sin 2C.\sin 2AB} \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) từng vế một và rút gọn ta được:

Vế trái $\geq \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C} = \frac{1}{2\cos A.\cos B.\cos C}$

Dấu "=" xảy ra khi sin2A = sin2B = sin2C ⇔ A = B = C

Cách 2: Ta có:

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C \\ &= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 4\sin A.\sin B.\sin C \end{aligned}$$

Suy ra: $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C} = \frac{4\sin A.\sin B.\sin C}{8\sin A.\cos A.\sin B.\cos B.\sin C.\cos C}$

$$= \frac{1}{2\cos A\cos B\cos C} \quad \text{(vế phải)}$$

Do đó ta có: $\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A.\sin 2B.\sin 2C}$

Đặt x = sin2A; y = sin2B; z = sin2C ta được:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{x+y+z}{x.y.z}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 = (x+y+z)xyz$$

$$= x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y = z \Leftrightarrow \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C$$

Xét $\sin 2A = \sin 2B \Leftrightarrow \sin 2A - \sin 2B = 0$

Do $\cos(A + B) = -\cos C \neq 0$ (vì Δ ABC nhọn). Do A, B nhọn $|A - B| < \frac{\pi}{2}$ từ $\sin(A - B) = 0 \Rightarrow A = B \Leftrightarrow A = B$

Tương tự; $B = C \Rightarrow \Delta$ ABC là tam giác đều

Bài 551-552

1. Giải phương trình: $\mathrm{tg}x + 2\cot g2x = \sin 2x$

2. Tính các góc của tam giác ABC nếu các góc A, B, C của tam giác đó thoả mãn hệ thức:

$$\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{5}{2} = 0$$

Đại học Sư phạm Hà Nội (B, M, T)

GIẢI

Giải phương trình: $\mathrm{tg}x + 2\cot g2x = \sin 2x$

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Đặt t = tgx, ta có phương trình:

$$t + 2\frac{1 - t^2}{2t} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{t} = \frac{2t}{1 + t^2} \Leftrightarrow t^2 = 1 \text{ nên } \mathrm{tg}^2x = 1$$

$\Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \cos 2x = 0$ (thoả mãn điều kiện) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình là $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}$

2. Tìm các góc của tam giác ABC thoả mãn hệ thức:

$$\cos 2A + \sqrt{3}\left(\cos 2B + \cos 2C\right) + \frac{5}{2} = 0 \qquad (1)$$

Biết $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ và $\cos 2B + \cos 2C = 2\cos(B + C)\cos(B - C)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{3}\cos(B + C)\cos(B - C) + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\cos^2 A - 4\sqrt{3}\cos A\cos(B - C) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\left(2\cos A - \sqrt{3}\cos(B - C)\right)\right]^2 + 3\sin^2(B - C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\cos A - \sqrt{3}\cos(B - C) = 0 \\ \sin(B - C) = 0 \end{cases}$$

- Với $\sin(B - C) = 0 \Leftrightarrow B = C + k\pi \ (k \in Z)$

Vì $0 < B,\ C < \pi$ nên $k = 0 \Rightarrow B = C$

- Với $B = C$ thì $2\cos A - \sqrt{3}\cos 0^0 = 0 \Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vì $0 < A < \pi$ nên $A = \frac{\pi}{6}$ và $B = C = \frac{\pi - A}{2} = \frac{5\pi}{12}$

Vậy các góc tam giác là $\boxed{A = \frac{\pi}{6}}$ và $\boxed{B = C = \frac{5\pi}{12}}$

Bài 553

Cho phương trình:

$$\left(8a^2 + 1\right)\sin^3 x - \left(4a^2 + 1\right)\sin x + 2a\cos^3 x = 0$$

1. Giải phương trình khi a = 0

2. Giải và biện luận theo tham số a phương trình trên

Đại học Sư phạm Quy Nhơn A)

GIẢI

1. Giải phương trình:

$$\left(8a^2 + 1\right)\sin^3 x - \left(4a^2 + 1\right)\sin x + 2a\cos^3 x = 0 \ \text{ khi } a = 0$$

Khi $a = 0$ ta có: $\sin^3 x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\left(-\cos^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2}} \ (k \in Z)$$

2. Giải và biện luận phương trình theo tham số a

$$\left(8a^2+1\right)\sin^3 x - \left(4a^2+1\right)\sin x + 2a\cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(8a^2+1\right)\sin^3 x - \left(4a^2+1\right)\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2a\cos^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2\sin^3 x - \left(4a^2+1\right)\sin x\cos^2 x + 2a\cos^3 x = 0 \qquad (1)$$

• Nếu a = 0 ta có phương trình đã giải ở 1, có nghiệm $\boxed{x = \frac{k\pi}{2}}$

• Nếu $a \neq 0$ thì cosx = 0 không phải là nghiệm của (1), chia (1) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4a^2 tg^3 x - \left(4a^2+1\right)tgx + 2a = 0$$

Đặt tgx = 0 ta có phương trình:

$$4a^2t^3 - \left(4a^2+1\right)t + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2at-1)\left(2at^2 + t - 2a\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2a}, \quad t = \frac{-1 \pm \sqrt{16a^2+1}}{4a}$$

Do đó $\quad tgx = \dfrac{1}{2a} = tg\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + k\pi$

$$\boxed{tgx = \frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a} = tg\beta \Rightarrow x = \beta + k\pi}$$

$$\boxed{tgx = \frac{-1-\sqrt{16a^2+1}}{4a} = tg\gamma \Rightarrow x = \gamma + k\pi}$$

Bài 554-555

1. Giải phương trình: $\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{1}{\cos^4 x} + \dfrac{2}{1-\cos^4 x}$

Đại học Sư phạm Hải Phòng (B)

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$ (1)

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}$ thì $x=t-\frac{\pi}{4}$ phương trình (1) trở thành:

$$\sin^3 t=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\sin t-\cos t$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin t(1-\cos^2 t)=\sin t-\cos t$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos t(1-\sin t\cos t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos t=0\\ 1=\frac{1}{2}\sin 2t \quad \text{vô nghiệm}\end{cases}$$

Với $\cos t=0 \Rightarrow \quad t=\frac{\pi}{2}k\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}\ (k\in Z)$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=\frac{1}{\cos^4 x}+\frac{2}{1-\cos^4 x}$

Đặt: $\cos^4 x=t;\ 0<t<1$, ta có:

$$f(t)=\frac{1}{t}+\frac{2}{1-t} \text{ thì } \min y=\min_{0<t<1} f(t)$$

Xét $$f'(t)=\frac{-1}{t^2}+\frac{2}{(t-1)^2}=\frac{t^2+2t-1}{t^2(t-1)^2}$$

$$f(t)=0 \Leftrightarrow t_1=-1-\sqrt{2}\notin(0;1)$$
$$t_2=-1+\sqrt{2}\in(0;1)$$

Bảng biến thiên:

t		$-1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		1
$f'(t)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$				‖	↘	$3+2\sqrt{2}$	↗	

Từ bảng biến thiên ta được: $\min\limits_{0<t<1} f(t) = f\left(-1+\sqrt{2}\right) = \boxed{3+2\sqrt{2}}$

Cách 2: Đặt $\cos^4 = t$ ta có:

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{1-t} = \frac{1-t+t}{t} + \frac{2(1-t+t)}{1-t}$$

$$= 3 + \frac{1-t}{t} + \frac{2t}{1-t}$$

Do $\quad 0 < t < 1$ nên $1 - t > 0$

Nên $\quad \frac{1-t}{t} + \frac{2t}{1-t} \geq 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad f(t) \geq 3 + 2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{1-t}{t} = \frac{2t}{1-t} \Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{2}$

Bài 556-557

1. **Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x - 3\cos^2 2x = 0$**

2. **Cho a, b lần lượt là các cạnh đối diện với các góc A, B của tam giác ABC. Xác định dạng của tam giác ABC nếu có:**

$$\left(a^2 + b^2\right)\sin(A - B) = \left(a^2 - b^2\right)\sin(A + B)$$

Đại học Tài chính Kế toán

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x - 3\cos^2 2x = 0 \qquad (1)$

Biết: $\quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ nên từ (1) ta có:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) - 3\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \cos 2x + 1 - \left(4\cos^3 2x - 3\cos 2x\right) - 6\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^3 2x + 3\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\cos 2x + 1)\left(\cos^2 2x + \cos 2x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \cos\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\alpha}{2} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in Z))$$

2. Xác định dạng của Δ ABC biết

$$\left(a^2+b^2\right)\sin(A-B) = \left(a^2-b^2\right)\sin(A+B)$$

Từ hệ thức đã cho ta có: $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2A) - \frac{1}{2}(1-\cos 2B)}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(A-B)\left(\frac{1}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B}\right) = 0$$

- Với $\sin(A-B) = 0 \Rightarrow A = B$: Δ ABC cân đỉnh C
- Với $\dfrac{1}{\sin C} = \dfrac{\sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B} \Rightarrow \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B$

$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$: Δ ABC vuông tại C.

Bài 558 - 559

1. Giải phương trình:

$$\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - 2\cos^2\left(\frac{9x}{2}\right)$$

2. Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn hệ thức: $\cot gA . \cot gB = tg^2\dfrac{C}{2}$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân hoặc vuông.

Đại học Thể dục Thể thao

GIẢI

1 Giải phương trình: $\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - 2\cos^2\left(\frac{9x}{2}\right)$

Biết: $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ và $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ nên vế phải có thể biến đổi thành:

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - 2\cos^2\left(\frac{9x}{2}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) - (1 + \cos 9x)$$

$$= \sin 5x - \cos 9x$$

Do đó phương trình đã cho là:

$$\cos 3x + \sin 7x = \sin 5x - \cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 9x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 6x \cos 3x + 2\cos 6x \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 6x(\cos 3x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 6x = 0 \\ \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

2. Chứng minh tam giác ABC cân hoặc vuông

Ta có: $\cot gA.\cot gB = tg^2\frac{C}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A \cos B(1 + \cos C) = \sin A \sin B(1 - \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos A \cos B - \sin A \sin B + \cos C(\cos A \cos B + \sin A \sin B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{r} \cos(A + B) + \cos C.\cos(A - B) = 0 \\ \cos C[\cos(A - B) - 1] = 0 \end{array}$$

* Với $\cos C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$

* Với $\cos(A - B) = 1 \Leftrightarrow A = B$

Vậy Δ ABC là tam giác vuông hoặc cân.

Bài 560 - 561

1. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu: $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

2. Giải phương trình: $\dfrac{2}{\sin^2 x}+2tg^2x+5tgx+5\cot gx+4=0$

Đại học Thươngmại

GIẢI

1. Nhận diện Δ ABC thoả mãn: $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

Ta có: $(a^2-b^2)\sin(A+B)=(a^2+b^2)\sin(A-B)$ (1)

Biến đổi vế trái:

$$(a^2-b^2)\sin(A+B)=4R^2(\sin^2A-\sin^2B)\sin(A+B)$$

$$=4R^2(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)\sin(A+B)$$

$$=16R^2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin(A+B)$$

$$=4R^2\sin^2(A+B)\sin(A-B)=c^2\sin(A-B) \quad (2')$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$c^2\sin(A-B)=(a^2+b^2)\sin(A-B)$$

$$\sin(A-B)[c^2-(a^2+b^2)]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin(A-B)=0\\ c^2=a^2+b^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=B\\ C=90^0\end{array}\right.$$

Vậy Δ ABC là tam giác cân hoặc vuông.

2. Giải phương trình: $\dfrac{2}{\sin^2 x}+2tg^2x+5tgx+5\cot gx+4=0$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2}$

Biết $\dfrac{1}{\sin^2 x}=1+\cot g^2x$ nên từ (1) ta có:

$$2\left(1+\cot g^2x\right)+2tg^2x+5(tgx+\cot gx)+4=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(tg^2x+\cot g^2x\right)-5(tgx+\cot gx)+6=0$$

Đặt $tgx+\cot gx=t,\ |t|\geq 2$, ta được:

$$2\left(t^2-2\right)-5t+6=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^2+5t+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1}{2}\text{(loại)} \\ t_2=-2 \end{array}\right.$$

Với $t=tgx+\cot gx=-2 \Leftrightarrow tgx=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ \ (k\in Z)$

Bài 562 - 563

1. Giải phương trình lượng giác:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$$

2. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh a, b,c và diện tích S thoả mãn: $S=(c+a-b)(c+b-a)$

Chứng minh: $tgC=\frac{8}{15}$

Đại học Thuỷ lợi

GIẢI

1. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$

Ta có: $\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{9\pi}{10}-\frac{3x}{2}\right)$

Do đó phương trình đã cho: $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{9\pi}{10}-\frac{3x}{2}\right)$

Đặt $\quad t=\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$ thì $\frac{9\pi}{10}-\frac{3x}{2}=3t$ ta được:

$$\sin t = \frac{1}{2}\sin 3t = \frac{1}{2}\left(3\sin t - 4\sin^3 t\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin t\left(1 - 4\sin^2 t\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\sin t = 0\\ 4\sin^2 t = 0\end{array}\right.$$

• Với $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{5} - 2k\pi}$

• Với $4\sin^2 t = 1 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 2t) = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{5} \pm \frac{\pi}{3} - 2k\pi}$$

2. Chứng minh: $\operatorname{tg}C = \frac{8}{15}$ biết $S = (c + a - b)(c + b - a)$

Ta có: $[c + (a - b)][c - (a - b)] = c^2 - (a - b)^2 = c^2 - (a^2 + b^2) + 2ab$

$= -2ab\cos C + 2ab$

$= 2ab(1 - \cos C) = 4ab\sin^2\frac{C}{2}$ và $S = \frac{1}{2}ab\sin C$

Do đó hệ thức đã cho là : $\frac{1}{2}ab\sin C = 4ab\sin^2\frac{C}{2}$

$$\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sin^2\frac{C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{4}$$

Biết $\operatorname{tg}C = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \dfrac{2.\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \dfrac{8}{15}$

Bài 564

1. Giải phương trình:

$$\frac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x\left(\sin x + \sqrt{2}\right)}{\sin 2x - 1} = 1$$

Đại học Thuỷ sản

GIẢI

Giải phương trình: $\dfrac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$ (1)

Điều kiện: $\sin 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$$(1) \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin 2x + 3\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x + 1 - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x + 1)(\sqrt{2}\sin x + 2) = 0$$

Do $\sqrt{2}\sin x + 2 \geq 0$ nên:

$$\sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \left[\begin{array}{ll} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi & \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi & \text{(loại vì } \sin 2x = 1) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

Bài 565- 566

1. Giải phương trình lượng giác:

$$\sin x + 2\cos x + \cos 2x - 2\sin x\cos x = 0$$

2. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu ta có: $\dfrac{a}{m_a} = \dfrac{b}{m_b} = \dfrac{c}{m_c}$ ở đây a, b, c theo thứ tự là độ dài các trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C.

Đại học Văn hoá (D)

GIẢI

1. Gải phương trình lượng giác:

$$\sin x + 2\cos x + \cos 2x - 2\sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x + 2\cos x(1 - \sin x) + 1 - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(2\sin x + 2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin x = 1 \\ 2\sin x + 2\cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

• Với sinx = 1 $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $(k \in Z)$

• Với 2sinx + 2cosx + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \sin\alpha$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \alpha + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{cases}} \quad (k \in Z)$$

2. Chứng minh Δ ABC là tam giác đều nếu: $\dfrac{a}{m_a} = \dfrac{b}{m_b} = \dfrac{c}{m_c}$

Ta có $\dfrac{a}{m_a} = \dfrac{b}{m_b}$ nên $\dfrac{a^2}{m_a^2} = \dfrac{b^2}{m_b^2} = a^2m_b^2 = b^2m_a^2$ (1)

Trong tam giác ABC với m_a, m_b là trung tuyến thuộc cạnh a và b, ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - \dfrac{a^2}{2}}{2} \quad \text{và} \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2 - \dfrac{b^2}{2}}{2} \qquad (2)$$

Thế m_a^2 và m_b^2 ở (2) vào (1) ta được:

$$a^2\left(\frac{a^2 + c^2 - \dfrac{b^2}{2}}{2}\right) = b^2\left(\frac{b^2 + c^2 - \dfrac{a^2}{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4 + a^2c^2 - \frac{a^2b^2}{2} = b^4 + b^2c^2 - \frac{a^2b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4 - b^4 + c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2)\cdot(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

Cũng chứng minh tương tự, từ $\dfrac{b}{m_c} = \dfrac{c}{m_c}$ ta suy ra b = c

Do đó a = b = c nên Δ ABC là tam giác đều.

Bài 567

Tìm m để phương trình $\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

Đại học Xây dựng

GIẢI

Tìm m để phương trình: $\sin 2x + m = \sin x + 2m\cos x$ (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$

$$(1) \Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x - \sin x + m - 2m\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\cos x - 1)(\sin x - m) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \sin x - m = 0 \end{array}\right.$$

Phương trình 2cosx - 1 = 0 một nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ là $\boxed{\frac{\pi}{3}}$.

Do đó ta cần tìm m để phương trình sinx = m có đúng một nghiệm thuộc $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ và khác $\frac{\pi}{3}$.

Tử đồ thị hàm số y = sinx ta tìm được giá trị của m là:

$$\boxed{0 \le m \le \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad m = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{và} \qquad m = 1}$$

Bài 568

Biết tga + cotga = m, tính tga - cotga

Đại học Y Hà Nội

GIẢI

Biết tga + cotga = m, tính tga - cotga

Đặt tga − cotga = x $\Rightarrow$ $tg^2a + cotg^2a = x^2 + 2$ (1)

Biết tga + cotga = m $\Rightarrow$ $tg^2a + cotg^2a = m^2 - 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$m^2 - 2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 = m^2 - 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{m^2 - 4} \qquad (3)$$

Do $tga + cotga \geq |2|$ nên (3) có nghĩa.

Cách 2: $tga + cot\,ga = \dfrac{2}{\sin 2a} = m \qquad \Rightarrow \qquad \sin 2a = \dfrac{2}{m}$

$$tga - cot\,ga = \frac{-2\cos 2a}{\sin 2a} = -2\cot g2a$$

$$= -2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2a} - 1} = -2\sqrt{\frac{m^2}{4} - 1} = \pm\sqrt{m^2 - 4}$$

Bài 569- 570

1. Xác định các giá trị của tham số a để phương trình có nghiệm:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x|$$

2. Cho tam giác ABC thoả mãn: $\dfrac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \dfrac{2p}{9R}$

Với a = BC, b = CA, c = AB; p là nửa chu vi; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tám giác. Chứng tỏ rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Đại học Y TP. Hồ Chí Minh

GIẢI

1. Xác định a để phương trình có nghiệm:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a|\sin 2x| \qquad (1)$$

Ta có: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x)$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x = a|\sin 2x|$

Đặt $t = |\sin 2x|$, điều kiện $0 \leq t \leq 1$ ta được:

$$1 - \frac{3}{4}t^2 = at \qquad \Leftrightarrow \qquad 3t^2 + 4at - 4 = 0 \qquad (2)$$

(2) luôn có hai nghiệm t_1 và t_2 thoả mãn $t_1 < 0 < t_2 < 1$

$\Leftrightarrow f(1) \geq 0$ hay $f(1) = 4a - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}$

2. Chứng tỏ Δ ABC là tam giác đều:

Ta có : $$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a\sin A + b\sin B + c\sin C} = \frac{2p}{9R} \quad (1)$$

Biết

$a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$ và $2p = a + b + c$

Vế trái: (1)

$$= \frac{2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C}{\frac{1}{2R}(ab + bc + ca)}$$

$$= \frac{2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)}{ab + bc + ca}$$

$$= \frac{2R^2.4\sin A.\sin B.\sin C}{ab + bc + ca}$$

$$= \frac{8R^2\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}}{ab + bc + ca} = \frac{abc}{R(ab + bc + ca)}$$

Vế phải (1): $\frac{2p}{9R} = \frac{a + b + c}{9}$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \frac{abc}{ab + bc + ca} = \frac{a + b + c}{9}$

$\Rightarrow 9abc = (a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 3\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = 9abc$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c \Rightarrow \Delta$ ABC là tam giác đều.

ĐỀ THI NĂM 2002

Bài 571

Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình:

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+\sin 2x}\right)=\cos 2x+3$$

Đại học và Cao đẳng (2002, A)

GIẢI

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3 \qquad (1)$$

Điều kiện: $1+2\sin 2x \neq 0$ hay $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$

Từ (1) ta có:

$$5(\sin x+2\sin 2x\sin x+\cos 3x+\sin 3x) = (\cos 2x+3)(1+2\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 5(\sin x+\cos x-\cos 3x+\cos 3x+\sin 3x) = (\cos 2x+3)(1+2\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 5(2\sin 2x\cos x+\cos x) = (\cos 2x+3)(1+2\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 5\cos x(1+2\sin 2x) = (\cos 2x+3)(1+2\sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 5\cos x = \cos 2x+3 = 2\cos^2 x+2$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

Vì $x\in(0;2\pi)$ suy ra các nghiệm: $x_1=\frac{\pi}{3}$ và $x_2=\frac{5\pi}{3}$, các nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$.

Bài 572

Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

Đại học và Cao đẳng (2002, B)

GIẢI

Giải phương trình: $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ (1)

Biết $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ và $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ nên

(1) $\Leftrightarrow$ $\cos 8x + \cos 6x = \cos 12x + \cos 10x$

$\Leftrightarrow$ $\cos x(\cos 11x - \cos 7x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos x \sin 9x \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin 9x \sin 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{\pi}{2}\\ x = k\dfrac{\pi}{9}\end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 573

Tìm x thuộc đoạn [0;14] nghiệm đúng phương trình:

$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

Đại học và Cao đẳng (2002, D)

GIẢI

Ta có: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ (1)

Biết $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

và $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ nên

(1) $\Leftrightarrow$ $4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4(\cos^3 x - 2\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos^2 x(\cos x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 2 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$$

Do $x \in (0;14)$ nên $0 \le \dfrac{\pi}{2} + k\pi \le 14 \Leftrightarrow k = (0,1,2,3)$

Với k = 0, 1, 2, 3 ta có các nghiệm: $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}$, và $\dfrac{7\pi}{2}$.

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

Chương I

Những điều cần nhớ và các công thức lượng giác 5

Chương II

Những đề lượng giác thi Đại học từ năm 1990 đến 1993 15

Những đề lượng giác thi Đại học năm 1994 41

Những đề lượng giác thi Đại học năm 1995 51

Những đề lượng giác thi Đại học năm 1996 108

Những đề lượng giác thi Đại học năm 1997 192

Những đề lượng giác thi Đại học năm 1998 273

Những đề lượng giác thi Đại học năm 1999 358

Những đề lượng giác thi Đại học năm 2000 410

Những đề lượng giác thi Đại học năm 2001 462

Những đề lượng giác thi Đại học năm 2002 504

Mục lục 506

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc Nguyễn Văn Thỏa
Tổng biên tập Nguyễn Thiện Giáp

Biên tập và sửa bản in: Nguyễn Giang
Trình bày bìa : Trần Tiểu Lâm

TUYỂN TẬP 570 BÀI TOÁN LƯỢNG GIÁC CHỌN LỌC
Mã số : 01. 165. ĐH
In 1.500 bản, tại nhà in ĐHQGHN.
Số xuất bản 8/416/ CXB.Số trích ngang KH/XB280
In xong và nộp lưu chiểu quý 4 năm 2002